

Pr M. BENAÏSSA

physique

Exercices avec solutions

3^o A . S .

AVANT-PROPOS

Ce recueil de corrigés d'exercices et de problèmes s'adresse aux futurs candidats au baccalauréat et aux divers examens d'entrée aux Instituts d'études supérieures.

Ces exercices qui suivent chacune des parties du programme, aideront, nous l'espérons, les élèves à la compréhension du cours magistral.

Chacun des chapitres débute par une série d'exercices d'application, suivis de problèmes proposés au baccalauréat et à d'autres examens ou concours d'un niveau équivalent ().*

Les solutions ne mettent en relief, et à dessein, que les principales étapes du raisonnement. Elles aident à maîtriser plus facilement le difficile passage de l'aspect physique du problème à sa mise en équation mathématique.

Cet ouvrage n'est qu'un guide au travail personnel de l'élève qui devra se référer aux cours afin de mieux comprendre et assimiler les bases mêmes de la physique.

L'AUTEUR.

Chapitre premier
CINEMATIQUE DU MOUVEMENT
RECTILIGNE UNIFORME

FORMULAIRE

Mouvement Uniforme :

$$x = vt + x_0$$

x = abscisse instantanée en **M**.

x_0 = abscisse à l'origine des dates en **M**.

– Vitesse Moyenne :

v = vitesse en mètre/seconde

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

t = le temps en seconde.

* * *

Ex. -1- :

Un mobile animé d'un mouvement uniforme se trouve à 8 h à $x_1 = -20\text{Km}$ et à 8 h 40' à $x_2 = 40\text{ Km}$.

1 – Ecrire son équation horaire en prenant comme origine des dates, 8 h.

2 – Donner sa position à 9 h.

SOLUTION :

1) Un mouvement uniforme rectiligne a pour équation horaire :

$x = vt + x_0$, où v est sa vitesse et x_0 son abscisse à $t = 0$

La vitesse vaut :

$$V = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{4.10^4 - (-2.10^4)}{40.60} = \frac{6.10^4}{24.10^2} = \underline{\underline{25\text{ m/s}}}$$

CONVERSION DE DONNEES :

$$x_1 = -20\text{ Km} = -2.10^4\text{ m}$$

$$x_2 = 40\text{ Km} = 4.10^4\text{ m}$$

A 8 h où $t = 0$, le mobile est à $x_0 = x_1 = -2.10^4\text{ m}$

d'où :

$$x = 25t - 2.10^4.$$

2) A 9 h ou 60' = 3600 secondes à partir de l'instant initial, il sera à :

$$x = 25.3600 - 2.10^4 = 7.10^4\text{ m} = 70\text{ Km}$$



Ex : - 2 - :

L'équation horaire d'un mobile en mouvement rectiligne est :

$x = 2(t - 2)$ où x est son abscisse exprimée en mètres et t le temps exprimé en secondes.

1 – Déterminer sa nature en précisant la valeur du vecteur vitesse et de son abscisse à l'origine des dates.

2 – Quelle est sa position à l'instant $t = 2s$?

3 – A quels instants sera-t-il à 2m de l'origine des espaces dans le sens positif et négatif ?

SOLUTION :

L'équation horaire peut s'écrire sous la forme :

$$x = 2(t - 2) = 2t - 4.$$

1) C'est un mouvement uniforme dont le vecteur vitesse est égal à $+2m/s$ et son abscisse à $t=0$ est $x_0 = -4 m$.

2) Si $t = 2s$; $x = 0$, il sera donc à l'origine des espaces.

$$\begin{aligned} 3) \quad x &= +2m \\ +2 &= 2t_1 - 4 \\ t_1 &= \underline{\underline{3s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -2m \\ -2 &= 2t_2 - 4 \\ t_2 &= \underline{\underline{1s}} \end{aligned}$$

— o O o —

Ex : - 3 -

Deux mobiles A et B cheminent sur un axe $X' O X$ orienté positivement de X' vers X . Avec des vecteurs vitesse $V_A = +72 \text{ Km/h}$ et $V_B = -108 \text{ Km/h}$. Sachant qu'à $t = 0$, A était à l'origine des abscisses et B à $+180 \text{ Km}$. Trouver la date et le lieu de la rencontre.

SOLUTION :

Les équations horaires des deux mobiles seront :

$$x_A = + 20t$$

$$x_B = - 30t + 18.10^4$$

CONVERSION DES DONNEES :

$$V_A = + 72\text{Km/h} = 72000/3600 \\ = + 20\text{m/s.}$$

$$V_B = - 108\text{Km/h} = -108000/3600 \\ = - 30\text{m/s.}$$

$$x_2 = 180\text{Km} = 18.10^4 \text{ m.}$$

Quand ils se rencontrent, leurs abscisses sont égales et on peut écrire :

$$20 t = - 30t + 18.10^4$$

$$t = 3600\text{s} = 1 \text{ heure après leur départ.}$$

Cette rencontre aura lieu à l'abscisse :

$$x_1 = 20 \cdot 3600 = + 72.10^3 \text{ m} = + \underline{\underline{72 \text{ Km}}}.$$



Ex. • 4 - :

Trois mobiles A, B, et C sont animés d'un mouvement uniforme sur un axe $X' O X$ avec des vecteurs de vitesse tels que :

$$V_A = +10\text{m/s} ; V_B = +20\text{m/s} ; V_C = - 20\text{m/s}$$

à l'instant $t = 0$, leurs abscisses respectives sont :

$$x_{0A} = 0 ; x_{0B} = - 50\text{m} ; x_{0C} = + 120\text{m.}$$

1 – Trouver les dates et les lieux de leurs différentes rencontres.

2 – En représentant les diagrammes des espaces, vérifier ces résultats (Echelle : 1cm pour 0,5 seconde et 10m).

SOLUTION :

Les trois équations horaires sont de la forme :

$$x = vt + x_0$$

$$x_A = 10t$$

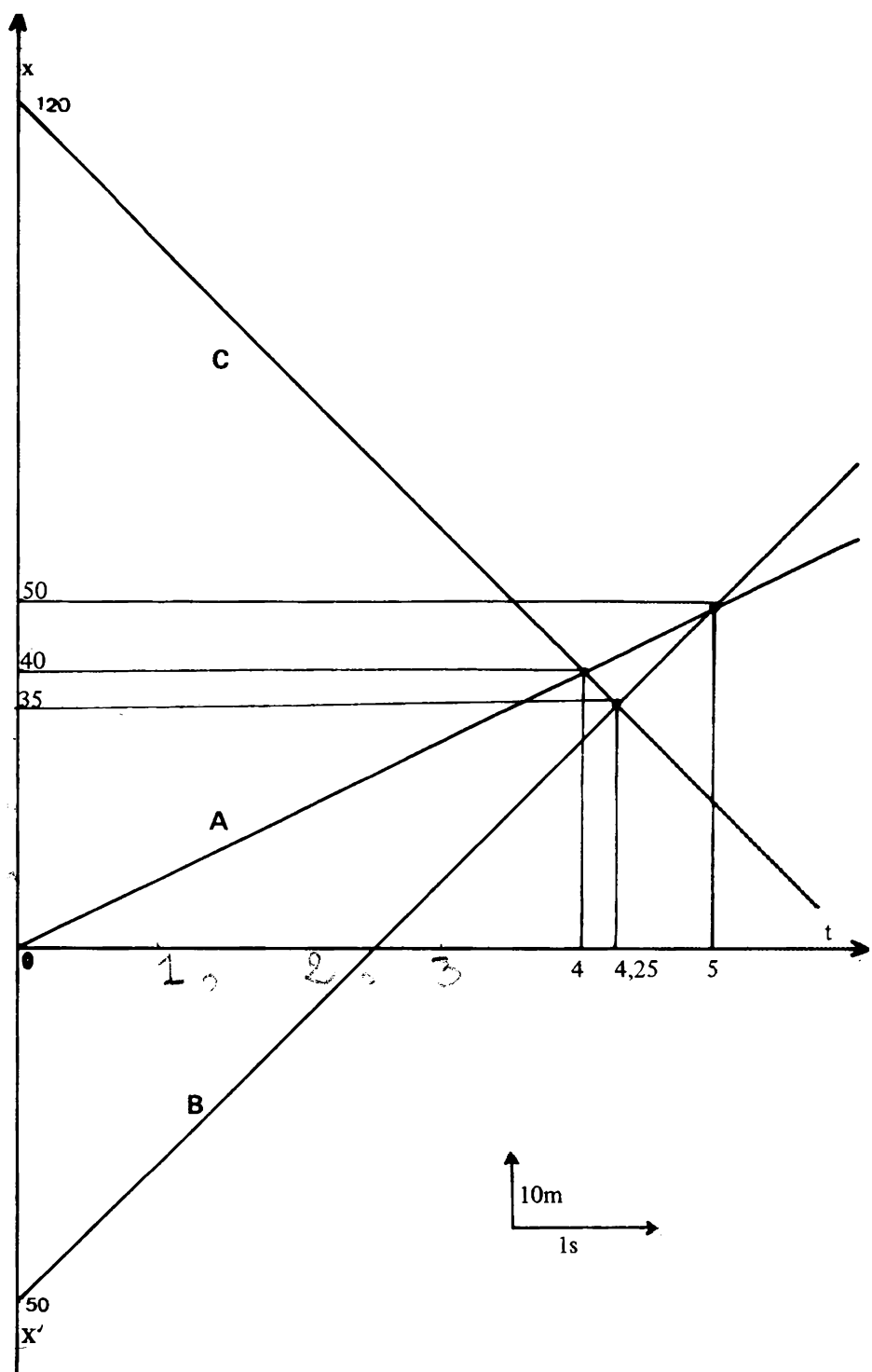
$$x_B = 20t - 50$$

$$x_C = - 20t + 120$$

. Rencontre de A avec B :

$$10t = 20t - 50$$

$$t = 5\text{s et } x = 50\text{m.}$$



. Rencontre de A avec C :

$$-20t + 120 = 10t.$$

$$t = 4\text{s et } x = 40\text{ m.}$$

. Rencontre de B avec C :

$$20t - 50 = -20t + 120$$

$$t = 4,25\text{ s et } x = 35\text{m.}$$



Ex. -5- :

Une barque descend le cours d'une rivière à une vitesse de 36 Km/heure par rapport à l'eau. Celle-ci, a une vitesse de 7,2 Km/heure par rapport à la berge. Une bouée tombe de la barque ; un quart-d'heure plus tard, le conducteur de la barque s'en aperçoit. Il rebrousse chemin.

- 1) En combien de temps retrouvera-t-il sa bouée (la barque conserve sa vitesse par rapport à l'eau pendant la remontée du cours).
- 2) Calculer les chemins parcourus par la bouée et la barque pendant la durée de recherche.
- 3) Reprendre le problème, dans le cas où la barque remonterait le cours avant la perte de la bouée.

SOLUTION :

Dans tout ce qui suit, on prendra comme axe de référence un axe lié à la berge. Les vitesses seront comptées par rapport à la berge. L'origine des abscisses sera le point où la bouée est tombée.

Quand la barque descend le cours, sa vitesse par rapport à la berge sera :

$$v_1 = 10 + 2 = 12\text{m/s.}$$

Par contre quand elle remonte le cours, on aura :

$$v'_1 = -10 + 2 = -8\text{m/s.}$$

La vitesse de la bouée par rapport à la berge sera :

$$v_2 = 2\text{m/s.}$$

Le sens positif est celui du cours d'eau.

- 1) Au moment où la barque rebrousse chemin, son abscisse est égale à (un quart-d'heure est équivalent à 900 secondes) :

$$x_1 = v_1 t = 12 \times 900 = 10800\text{ m.}$$

La bouée est à l'abscisse :

$$x_2 = v_2 t = 2 \times 900 = 1800\text{ m.}$$

Si l'on prend $t=0$ (origine des dates), l'instant où la barque rebrousse chemin, les équations horaires de la barque et de la bouée seront :

$$x_3 = v_1' t + 10800.$$

$$x_4 = v_2 t + 1800.$$

A la rencontre on aura :

$$x_3 = x_4 = -8t + 10800 = 2t + 1800.$$

d'où la durée de recherche :

$$t_1 = \underline{\underline{900s}} \quad (\text{Un quart d'heure}).$$

2) La bouée aura parcouru :

$$d_1 = 900 \cdot 2 = 1800\text{m} \quad (\text{la bouée aura parcouru toute seule } 3600 \text{ m en tout}).$$

La barque parcourra la distance d_2 , avant de retrouver la bouée :

$$d_2 = 900 \cdot 8 = 7200\text{m}.$$

3) Dans le cas où la barque remonterait le cours, les abscisses de la bouée et de la barque, au moment où celle-ci rebrousse chemin, seront :

$$x_5 = v_1' t = -8 \cdot 900 = -7200\text{m}.$$

$$x_6 = v_2 t = 2 \cdot 900 = 1800\text{m}.$$

En prenant $t = 0$, comme dans le premier cas, on a :

$$x_7 = v_1 t - 7200.$$

$$x_8 = v_2 t + 1800.$$

A la rencontre, on a :

$$x_7 = x_8 = 12t - 7200 = 2t + 1800.$$

$$t_2 = \frac{9000}{10} = 900\text{s}$$

Les distances parcourues seront :

$$d_1' = 900 \cdot 2 = 1800\text{m}.$$

$$d_2' = 900 \cdot 12 = 10800\text{m}.$$



Chapitre deuxième
CINEMATIQUE DU MOUVEMENT UNIFORMEMENT
VARIE

F O R M U L A I R E

MOUVEMENT UNIFORMEMENT VARIE :

$$v = \gamma t + v_0$$

– Equation Horaire :

$$x = \frac{1}{2} \gamma t^2 + v_0 t + x_0$$

– Accélération Moyenne :

$$\frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \gamma$$

– Accélération Instantanée :

$$\frac{dV}{dt} = \gamma$$

v = Vitesse instantanée (m/s)

γ = Accélération (m/s²)

v_0 = Vitesse initiale (m/s)

x_0 = Abscisse à l'origine

PROPRIETE DU MOUVEMENT UNIFORMEMENT VARIE :

$$V_2^2 - V_1^2 = 2 \gamma (x_2 - x_1)$$

$r = \gamma \theta^2$ (Raison de la progression arithmétique, formée par les espaces parcourus pendant des intervalles de temps égaux et consécutifs.)



Ex. - 1 - :

L'équation horaire du mouvement d'un mobile s'écrit :

$$x = 2t(4-t).$$

- 1) De quel type de mouvement s'agit-il ? Définir ses caractéristiques.
- 2) Quand et où la vitesse va-t-elle s'annuler pour changer de sens ?

SOLUTION :

1) $x = 2t(4-t) = -2t^2 + 8t.$

C'est un mouvement uniformément retardé, de décélération $\gamma = -4\text{m/s}^2$, de vitesse initiale $v_0 = 8\text{m/s}$ et d'abscisse à l'origine des dates $x_0 = 0$.

- 2) L'expression de sa vitesse est donc :

$$v = -4t + 8.$$

Elle s'annulera pour :

$$v = 0$$

$$t = \frac{8}{4} = 2\text{s}.$$

L'abscisse correspondante peut être calculée de deux façons :

- a) L'équation horaire donne :

$$x = -2.4 + 8.2 = 8\text{m}.$$

b) $\frac{v^2}{2\gamma} = x = \frac{64}{2.4} = 8\text{m}.$



Ex. - 2 - :

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne. Sa vitesse passe uniformément de la valeur 20m/s à 10m/s en 10 s.

- 1) Ecrire son équation horaire ; à l'instant initial $t=0$, on a :

$$v_0 = 20\text{ m/s} \text{ et } x_0 = 2\text{ m}.$$

- 2) Trouver sa position à l'instant $t = 15\text{ s}.$

- 3) Trouver l'instant et la position où sa vitesse s'annule pour changer de sens.

SOLUTION :

$$1) x = \frac{1}{2} \gamma t^2 + V_0 t + x_0$$

$$\text{avec } x_0 = 2 \text{ m}$$

$$V_0 = 20 \text{ m/s}$$

$$\text{et } \gamma = \frac{10-20}{10} = -1 \text{ m/s}^2$$

$$\text{d'où } x = \frac{-1}{2} t^2 + 20t + 2$$

$$2) x_{15} = -112,5 + 300 + 2 = \underline{\underline{189,5 \text{ m}}}$$

$$3) \text{ On sait que } t = \frac{v - v_0}{\gamma}$$

La vitesse s'annule à l'instant :

$$t = \frac{-20}{-1} = 20 \text{ s}$$

$$\text{d'après : } V^2 - V_0^2 = 2\gamma(x - x_0)$$

$$V=0 \rightarrow x = \frac{-V_0^2}{2\gamma} + x_0 = \frac{-400}{-2} + 2 = 202 \text{ m}$$



Ex. - 3 - :

Animé d'un mouvement uniformément varié, un mobile a une accélération $\gamma = -4 \text{ m/s}^2$, à l'instant initial $t=0$ la vitesse est égale à $V_0 = +20 \text{ m/s}$.

1) Calculer les dates et les vitesses correspondantes aux abscisses :

$x_1 = 0$; $x_2 = 32$; $x_3 = 48$; $x_4 = 50$; s'il est à l'origine des espaces à $t=0$.

2) Disposer sur le même axe ces résultats. Que peut-on dire de ce mouvement ?

SOLUTION :

1) Nous avons un mouvement uniformément varié (retardé) dont l'équation horaire s'écrit :

$$x = \frac{1}{2} \gamma t^2 + V_0 t \quad (x_0 = 0)$$

avec $\gamma = -4\text{m/s}^2$ et $v_0 = 20\text{m/s}$

$$x = -2t^2 + 20t$$

– Si $x = 0$ on a : $-2t^2 + 20t = t(-2t + 20) = 0$

$$t'_0 = 0 ; t''_0 = 10\text{s.}$$

– Si $x = 32\text{m}$ on a : $-2t^2 + 20t = 32$

avec $\sqrt{\Delta} = \pm 12$, $t' = 2\text{s}$; $t'' = 8\text{s}$

– Si $x = 48\text{ m}$ on a : $-2t^2 + 20t = 48$

avec $\sqrt{\Delta} = \pm 4$; $t' = 4\text{s}$; $t'' = 6\text{s.}$

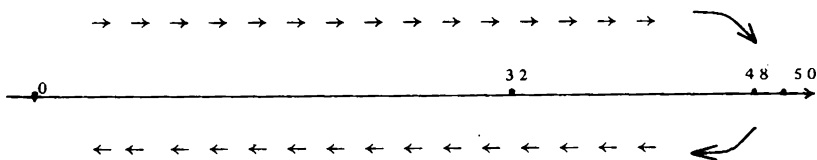
– Si $x = 50\text{ m}$ on a : $-2t^2 + 20t = 50$

avec $\Delta = 0$ $t = 5\text{s.}$

L'expression générale de la vitesse est : $v = -4t + 20$ d'où en remplaçant t par ces valeurs trouvées ci-dessus ;

On aura donc le tableau suivant :

x	0	32	48	50	48	32	0
t	0	2	4	5	6	8	10
v	20	12	4	0	-4	-12	-20



C'est un Mouvement d'aller-retour.



Ex. - 4 - :

Démontrer que, si un mobile est animé d'un mouvement uniformément varié, la vitesse moyenne entre les instants t_1 et t_2 est égale :

a) à la moyenne arithmétique des vitesses vraies à ces instants.

b) à la vitesse vraie à l'instant : $\frac{t_1 + t_2}{2}$

SOLUTION :

La vitesse moyenne par définition est égale à :

$$v'_1 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{1}{2} \gamma t_2^2 - \frac{1}{2} \gamma t_1^2}{t_2 - t_1} = \frac{1}{2} \gamma (t_2 + t_1)$$

a) La moyenne arithmétique des deux vitesses à t_1 et t_2 :

$$v'_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{\gamma t_1 + \gamma t_2}{2} = \frac{1}{2} \gamma (t_2 + t_1)$$

b) La vitesse vraie à l'instant $\frac{t_1 + t_2}{2}$ est :

$$v'_3 = \gamma t = \gamma \frac{t_1 + t_2}{2}$$

$$\text{On a bien : } v'_1 = v'_2 = v'_3$$



Ex. - 5 - :

Deux mobiles sont animés d'un mouvement uniformément varié le long d'un même axe orienté $X'OX$. Leur vecteur accélération a pour valeur $\gamma_1 = 4\text{m/s}^2$ et $\gamma_2 = 2\text{m/s}^2$. Leur abscisse à l'instant $t=0$ est $x_1 = 4\text{m}$ et $x_2 = 124\text{m}$. Trouver la date et le lieu de leur rencontre sachant que leur vitesse initiale est $v_1 = 20\text{m/s}$ et $v_2 = 18\text{m/s}$.

SOLUTION :

Les équations horaires de ces deux mouvements s'écrivent :

$$x_1 = 2t^2 + 20t + 4$$

$$x_2 = t^2 + 18t + 124$$

d'où

$$2t^2 + 20t + 4 = t^2 + 18t + 124$$

$$t^2 + 2t - 120 = 0$$

$t_1 = 10\text{s}$ et $t_2 = -12\text{s}$ (12 secondes avant $t = 0$ les deux mobiles étaient ensemble).

En remplaçant dans l'une des deux équations horaires le temps par 10s ou -12s on trouve :

$$x_1 = 404\text{m} \text{ et } x_2 = 52 \text{ m.}$$



Ex. - 6 - :

La traversée par train d'une portion de voie où s'effectuent des travaux, se déroule en trois phases :

Phase I : Sur une distance de 150m, le train réduit sa vitesse de 72 Km/h à 36 Km/h.

Phase II : Avec cette dernière vitesse, il traverse en mouvement uniforme une distance de 50 m.

Phase III : Sur 75 m, il traverse la dernière phase qui lui permet en accélérant de retrouver sa vitesse de 72 Km/h.

- 1) Calculer la durée des trois phases. En déduire le retard qu'il a eu à cause des travaux si l'on suppose que sa vitesse moyenne sans les travaux est de 72 Km/h.
- 2) Porter sur un même graphique les diagrammes des espaces, des vitesses et des accélérations.
1 cm pour ; t = 1s ; x = 25 m ; v = 5m/s et = 1m/s².

SOLUTION :

1) Phase I : C'est un mouvement uniformément retardé qui a duré :

$$t_1 = \frac{v_2 - v_1}{\gamma_1} \text{ avec } \gamma_1 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2X} = \frac{100 - 400}{2 \cdot 150} = -1 \text{ m/s}^2$$

$$\text{donc : } t_1 = \frac{10 - 20}{-1} = \underline{\underline{10 \text{ s}}}$$

Phase II : C'est un mouvement uniforme. La durée de la deuxième phase sera :

$$t_2 = \frac{50}{10} = \underline{\underline{5 \text{ s}}}$$

Phase III : C'est un mouvement uniformément accéléré qui a duré :

$$t_3 = \frac{V_2 - V_1}{\gamma_2} \text{ avec } \gamma_2 = \frac{400 - 100}{2 \times 75} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$t_3 = \frac{10}{2} = \underline{\underline{5 \text{ s}}}$$

$$T = t_1 + t_2 + t_3 = \underline{\underline{20 \text{ s}}}$$

S'il n'y avait pas de travaux, la durée T' serait égale à :

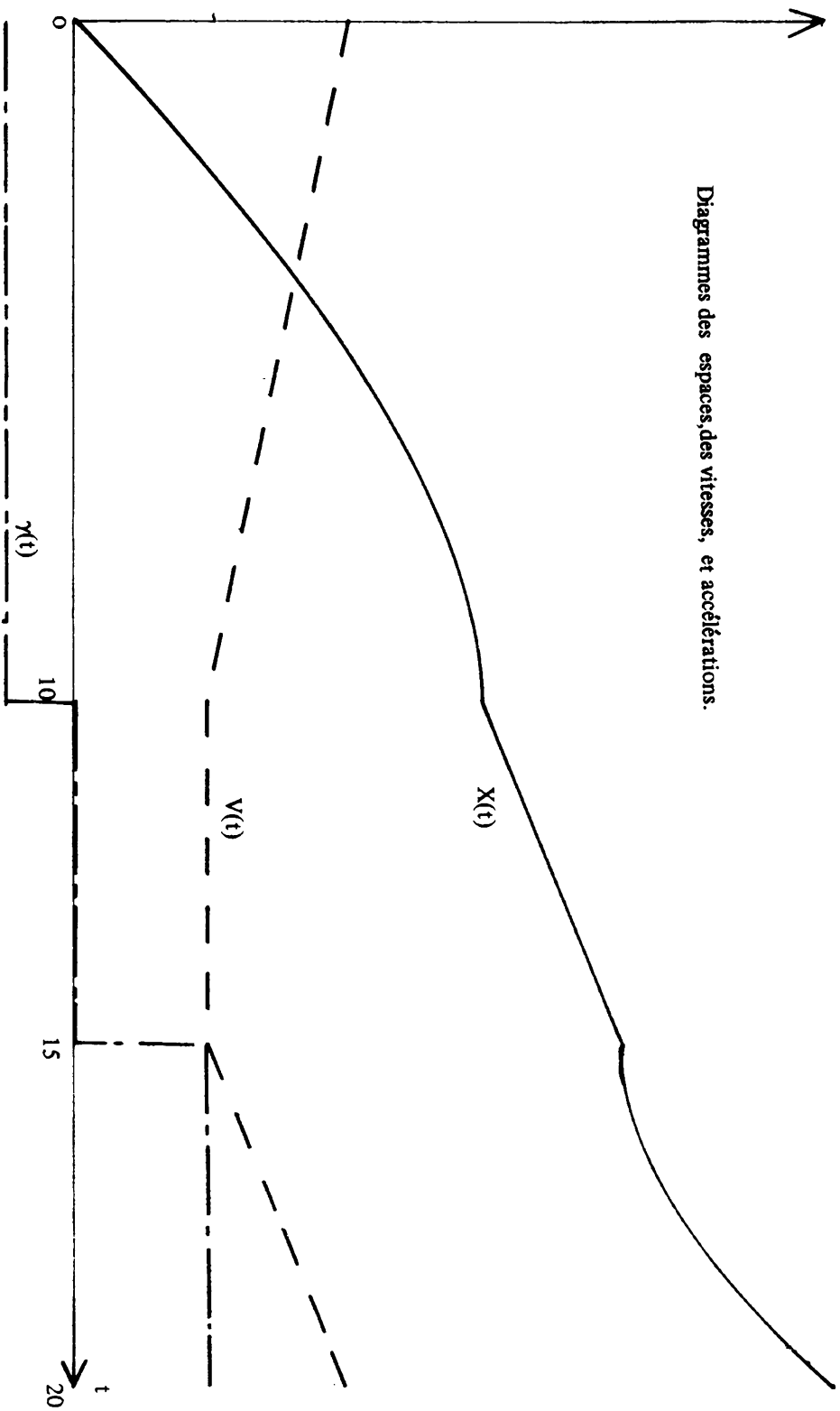
$$T' = \frac{150 + 50 + 75}{20} = 13,75 \text{ s}$$

Le retard est de :

$$20 - 13,75 = \underline{\underline{6,25 \text{ s}}}$$



Diagrammes des espaces, des vitesses, et accélérations.



Ex. : 7* :

Une automobile se déplaçant sur une trajectoire rectiligne, on note les temps et les vitesses suivants :

temps (s)	:	0	1	2	5	10
vitesse (Km/h)	:	0	7,2	14,4	36	72

- 1) Peut-on avec ces données, indiquer la nature du mouvement ?
- 2) Quelle est l'accélération moyenne du véhicule ?
- 3) L'accélération étant supposée constante, calculer la distance parcourue par la voiture, partant du repos, après 20 s de marche. Quelle est alors sa vitesse en Km/h ?
- 4) On lance la voiture d'un point A, sans vitesse initiale, avec l'accélération γ . Quand la vitesse de 72 Km/h est obtenue, on la maintient pendant une certaine durée θ secondes, puis on freine en imprimant à la voiture une accélération $\gamma' = -5$ m/s/s pendant θ' secondes, jusqu'à l'arrêt, au point B. Le parcours total AB est de 260 m. Calculer θ et θ' .
- 5) Tracer, pour le trajet AB, les diagrammes des espaces et des vitesses en fonction du temps.

Echelles : 1 cm représente 1 s ; 20 cm et 10 Km/h.

SOLUTION :

	t	1	2	5	10
Km/h	V	7,2	14,4	36	72
m/s	V	2	4	10	20

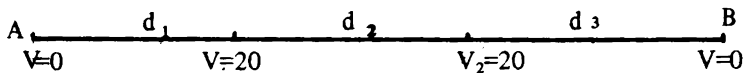
- 1) et 2) Le mouvement est uniformément varié, étant donné que la vitesse est proportionnelle au temps.

$$\gamma = \frac{V}{t} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{10}{5} = \frac{20}{10} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$3) e = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (20)^2 = 400 \text{ m}$$

$$v_e = 2 \cdot 20 = 40 \text{ m/s} = 144 \text{ Km/h}$$

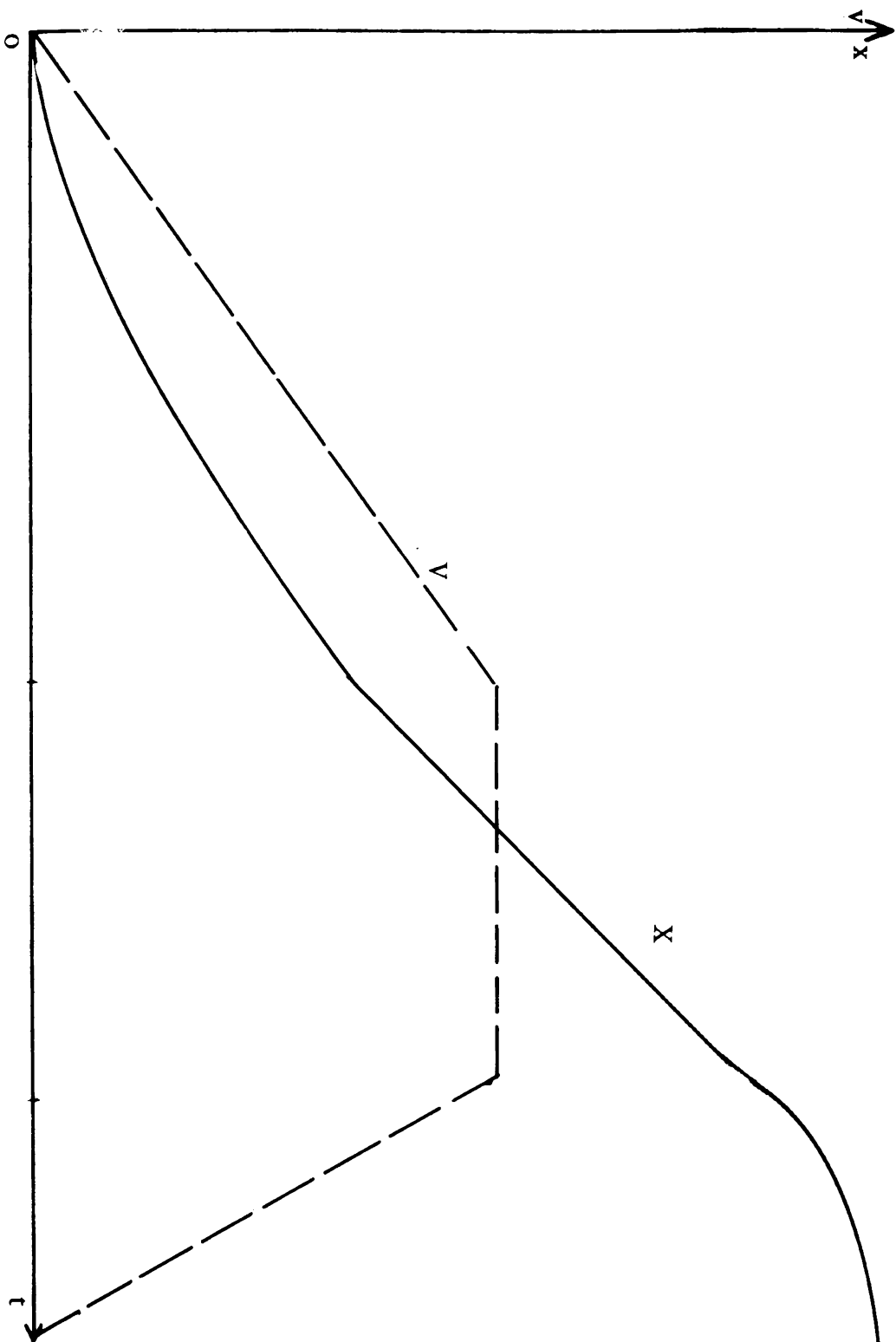
4)



D'après $v = \gamma t + v_0$, on a sur la dernière phase :

$$0 = -5 \theta' + 20, \theta' = \underline{\underline{4 \text{ s}}}$$

Calculons la distance d_2 pour en tirer θ , on a :



$$d_3 = \frac{-V^2}{2\gamma'} = \frac{-400}{-10} = 40 \text{ m}$$

$$d_1 = \frac{V^2}{2\gamma} = \frac{400}{4} = 100 \text{ m}$$

$$\text{donc } d_2 = 260 - (40 + 100) = 120 \text{ m}$$

θ est donc égale à :

$$\theta = \frac{120}{20} = \underline{\underline{6 \text{ s}}}$$



Ex. - 8* :

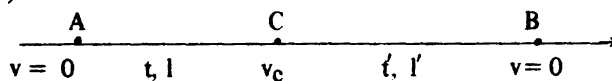
- 1) Une rame de métro, partant du repos, parcourt 155m en 22s. En supposant le mouvement uniformément varié, calculer son accélération γ .
- 2) Partant de la station A, le conducteur lance la rame avec une accélération $\gamma = 0,7 \text{ m/s}^2$ sur un parcours l. Au bout d'un temps t, quand il juge la vitesse suffisante pour pouvoir atteindre, simplement en vertu de la vitesse acquise, la station suivante B, le conducteur coupe le courant. Les frottements ralentissent alors le mouvement qui s'effectue avec une accélération $\gamma' = -0,05 \text{ m/s}^2$ sur un parcours l' pendant t'. La distance AB est de 500 m. Calculer :
 - a) t et t' les durées des 2 phases du parcours.
 - b) l et l' les deux parcours.
 - c) La vitesse maximum du train.
 - d) La vitesse moyenne du train entre les 2 stations.
 Faites un diagramme des espaces et vitesses.
- 3) Si le conducteur avait coupé le courant une seconde trop tard, de quelle longueur aurait-il manqué l'arrêt en B, en admettant pour la phase de freinage les mêmes caractéristiques ?

SOLUTION :

- 1) Le mouvement est uniformément varié : $x = \frac{1}{2} \gamma t^2$.

$$\gamma = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \cdot 155}{(22)^2} = 0,64 \text{ m/s}^2.$$

- 2)



$$\text{Pour la phase AC on a : } l = \frac{1}{2} \gamma t^2 \quad (1')$$

$$\text{et : } v_c = \gamma t \quad (2)$$

$$\text{Pour la phase BC on a : } l' = \frac{1}{2} \gamma' t'^2 + v_c t' \quad (3)$$

$$\text{et : } v_c = -\gamma' t' \quad (4)$$

$$l + l' = 500 \quad (5)$$

La solution du système de cinq équations à cinq inconnues nous donne :

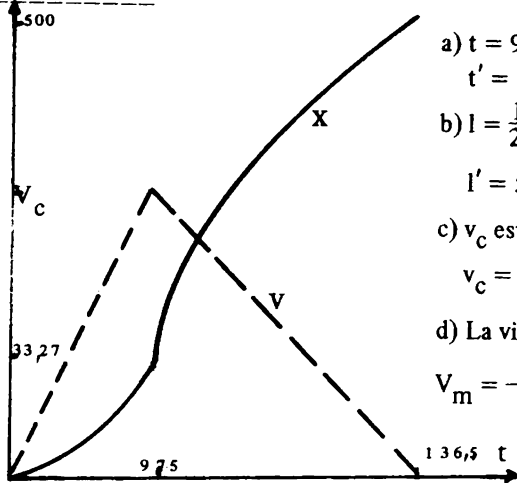
$$(2) \text{ et } (4) \rightarrow \gamma t = -\gamma' t' \text{ donc } t' = \frac{-\gamma}{\gamma'} t \quad (6)$$

(3) peut s'écrire grâce à (6) et (4)

$$l' = \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\gamma'} t^2 - \frac{\gamma^2}{\gamma'} t^2 = -\frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\gamma'} t^2$$

$$l + l' = \frac{t^2}{2} \left(\gamma - \frac{\gamma^2}{\gamma'} \right) = 500.$$

DIAGRAMME :



a) $t = 9,75 \text{ s}$

$t' = 136,5 \text{ s}$

b) $l = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot (9,75)^2 = 33,27 \text{ m}$

$l' = 500 - 33,37 = 466,73 \text{ m}$

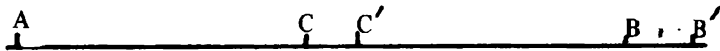
c) v_c est la vitesse maximale du train.

$v_c = \gamma t = 6,82 \text{ m/s.}$

d) La vitesse moyenne sera :

$$V_m = \frac{500}{9,75 + 136,5} = 3,41 \text{ m/s}$$

3)



En 10,75 s, il sera en C' tel que :

$$AC' = \frac{1}{2} \gamma t''^2 = \frac{1}{2} 0,7 (10,75)^2 = 40,44 \text{ m.}$$

Sa vitesse en C' serait :

$$V'_C = \gamma t'' = 0,7 \cdot 10,75 = 7,52 \text{ m/s.}$$

Cette vitesse s'annulerait sur la distance C' B' donc :

$$C' B' = \frac{V_C'^2}{2\gamma'} = \frac{(7,52)^2}{2,0,05} = 565,5 \text{ m.}$$

Il dépassera B de :

$$BB' = AB' - AB = (565,5 + 40,44) - 500 = \underline{\underline{105,94 \text{ m.}}}$$



Ex. - 9 - :

Un obus arrive sur un mur d'épaisseur $e = 25\text{cm}$, avec une vitesse de $V_0 = 300 \text{ m/s}$. Il traverse le mur et en sort avec une vitesse de $V_1 = 200\text{m/s}$.

- 1) Calculer la durée de la traversée du mur.
- 2) Quelle est l'épaisseur minimale de ce mur qui arrêterait l'obus ?
- 3) Quelle est la vitesse minimale que doit avoir l'obus pour traverser seulement un mur de 60cm ?

SOLUTION :

- 1) Pendant la traversée du mur, l'obus est animé d'un mouvement uniformément retardé avec une décélération :

$$\gamma = \frac{V_1^2 - V_0^2}{2e} = \frac{4 \cdot 10^4 - 9 \cdot 10^4}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-2}}$$

$$\gamma = -10^5 \text{ m/s}^2$$

L'équation de la vitesse nous donne :

$$t = \frac{V_1 - V_0}{\gamma} = \frac{200 - 300}{-10^5}$$

$$t = 10^{-3} \text{ s} = \underline{\underline{1 \text{ ms}}}$$

- 2) L'épaisseur e_2 qui arrêterait l'obus vérifiera l'expression suivante :

$$e_2 = \frac{V_1^2 - V_0^2}{2\gamma}, \text{ avec } V_1 = 0$$

$$\text{d'où } e_1 = \frac{-V_0^2}{2\gamma} = \frac{-9 \cdot 10^4}{-2 \cdot 10^5}$$

$$e_1 = 4,5 \cdot 10^{-1} \text{ m} = \underline{\underline{45 \text{ cm}}}$$

3) La vitesse V'_0 qui permet à l'obus de traverser seulement un mur de 60cm sera :

$$V'_0 = \sqrt{2 \gamma e} = \sqrt{2 \cdot 10^5 \cdot 0,6}$$

$$= 10^2 \cdot \sqrt{12} \cong \underline{\underline{346 \text{ m/s.}}}$$



Ex. - 10 - :

Un mobile A roule à la vitesse constante de 72 Km/h. Devant lui, à 175m, un autre mobile B démarre avec une accélération telle que sa vitesse au bout de 900m devient égale à 108 Km/h, valeur qu'il garde pour continuer sa route.

— Trouver les instants des dépassements consécutifs et les abscisses respectives.

SOLUTION :

Si on choisit comme origine des espaces le point de départ de B et son instant de départ, origine des dates, on a :

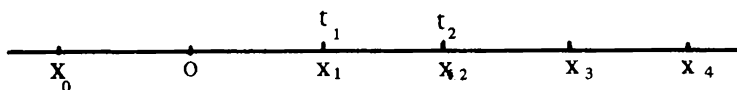
$$x_A = vt + x_0$$

$$x_B = \frac{1}{2} \gamma t^2$$

avec $v = 72 \text{ Km/h} = 20 \text{ m/s}$

$$x_0 = -175 \text{ m}$$

$$\gamma = \frac{900}{2 \times 900} = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2 \quad (108 \text{ Km/h} = 30 \text{ m/s})$$



Aux dépassements on aura :

$$\frac{1}{4} t^2 = 20 t - 175$$

Ou aussi :

$$t^2 - 80t + 700 = 0$$

Equation du deuxième degré qui donne deux solutions :

$$t_1 = \frac{80-60}{2} = 10 \text{ s}$$

d'où

$$x_1 = 25 \text{ m.}$$

Donc 10s après le démarrage de B, A le double à 25m de son point de départ.

La deuxième solution de l'équation sera :

$$t_2 = \frac{80 + 60}{2} = 70 \text{ s.}$$

Elle correspondrait à l'abscisse :

$$x = \frac{4900}{4} = 1225 \text{ m.}$$

Cette solution est à rejeter parce que, à 1225m le mobile B a un mouvement uniforme.

Calcul de l'instant de la 2ème rencontre : Quand B arrive en x_2 , point où il entame son mouvement uniforme, A est en x_3 . B sera en x_2 à l'instant :

$$t_2 = \frac{V}{\gamma} = \frac{30}{0,5} = 60 \text{ s.}$$

A l'instant t_2 la voiture A se trouve en :

$$x_3 = vt - 175 = 20 \times 60 - 175 = 1025 \text{ m.}$$

On peut écrire en choisissant l'instant t_2 comme origine des dates :

$$x_A = 20 t + 1025$$

$$x_B = 30 t + 900$$

d'où $t_3 = 12,5 \text{ s.}$

Donc B doublera à son tour A, 82,5s après le démarrage de B ; ceci se fera à l'abscisse :

$$x_4 = 20 \times 12,5 + 1025 = \underline{\underline{1275 \text{ m.}}}$$



Chapitre troisième

CHUTE LIBRE

Ex. - 1 - :

Un corps tombe d'une hauteur h du sol en chute libre ($g = 10 \text{ m/s}^2$).
Calculer h pour que le dernier mètre soit parcouru en $1/10$ de seconde.
Envisager le cas où la vitesse initiale est nulle et égale à 5 m/s .

SOLUTION :

Pour le dernier mètre, on peut écrire :

$$h = \frac{1}{2} g t^2 + v_1 t$$

$$1 = 5 \left(\frac{1}{100} \right) + v_1 \left(\frac{1}{10} \right); \text{ d'où } v_1 = 9,5 \text{ m/s}$$

– Si $v_0 = 0$

$$x_1 = v_1^2 / 2g = \frac{(9,5)^2}{20} = 4,51 \text{ m}$$

$$h = 1 + 4,51 = 5,51 \text{ m}$$

– Si $v_0 = 5 \text{ m/s}$

$$x_2 = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} = \frac{(9,5)^2 - 25}{20} = 3,26 \text{ m}$$

$$h = 1 + 3,26 = 4,26 \text{ m}$$



Ex. - 2 - :

Une pierre est abandonnée sans vitesse initiale à l'orifice d'un puits, l'observateur entend le bruit du choc de la pierre sur l'eau 4s après l'abandon. A quelle profondeur est-elle située (vitesse du son = 340 m/s).

SOLUTION :

La pierre en chute libre mettra un temps t_1 pour arriver à la surface de l'eau avec :

$$h = \frac{1}{2} g t^2, \text{ si } h \text{ est la hauteur du puits on a :}$$

$$h = 5 t_1^2 \text{ d'où } t_1 = \sqrt{h/5}$$

Le son remontera avec une vitesse uniforme et mettra un temps t_2 pour arriver à l'observateur, tel que :

$$h = 340 t_2 \quad t_2 = \frac{h}{340}$$

$$\text{On sait que : } t_1 + t_2 = 4 = \frac{h}{340} + \sqrt{h/5}$$

$$\sqrt{h/5} = 4 - \frac{h}{340}$$

$$\frac{h^2}{(340)^2} - h \left(\frac{8}{340} + \frac{1}{5} \right) + 16 = 0$$

$$h^2 - 25840 h + 1849600 = 0$$

$$h = 72 \text{ m}$$

$$\text{on a bien : } t_1 = \sqrt{\frac{72}{5}} = 3,79 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{72}{340} = 0,21 \text{ s.}$$



Ex. - 3 - :

Un corps en chute libre le long d'une verticale $X'OX$ orientée vers le bas a une vitesse de 22 m/s, 2s après le début de sa chute.

Sachant que pour $t = 0$, $x_0 = 0$

- 1) Trouver la distance parcourue à l'instant $t = 4\text{s}$ et la vitesse correspondante.
- 2) A quel instant sera-t-il à $x = 100 \text{ m}$ ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

SOLUTION :

1) L'équation horaire de ce mouvement sera :

$$h = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \text{ avec } v_0, \text{ telle que : } V = g t + v_0$$

$$\text{d'où } v_0 = V - g t = 22 - (2 \times 10) = 2 \text{ m/s}$$

Donc l'équation horaire sera :

$$h = 5t^2 + 2t \text{ et } v = 10t + 2$$

pour $t = 4\text{s}$

$$x_4 = 80 + 8 = 88 \text{ m.}$$

$$V_4 = (20 + 2) = 22 \text{ m/s.}$$

2) Si $h = 100 \text{ m}$ on a :

$$100 = 5t^2 + 2t$$

$$t' = 4,27s$$

$$V = (10 \cdot 4,27) + 2 = 44,7 \text{ m/s}$$



Ex. - 4 - :

Une balle est lancée verticalement vers le haut avec une vitesse de 20 m/s. 2s plus tard, une autre balle est lancée avec la même vitesse. Quand et où aura lieu la rencontre ?

SOLUTION :

Orientons la verticale de chute vers le bas et prenons comme origine des dates, le départ de la deuxième balle. Son équation horaire s'écrira :

$$h_2 = \frac{1}{2} g t^2 + v_{O_2} t = 5t^2 - 20t$$

L'équation horaire de la première balle s'écrira :

$$h_1 = \frac{1}{2} g t^2 + v_{O_1} t + x_{O_1}$$

avec v_{O_1} et x_{O_1} la vitesse et l'abscisse de la première balle, au départ de la deuxième balle :

$$v_{O_1} = g t + v_O = (10 \cdot 2) - 20 = 0$$

$$\text{et, } x_{O_1} = (5 \cdot 4) - (20 \cdot 2) = -20 \text{ m}$$

$$\text{donc : } h_1 = 5t^2 - 20$$

La rencontre aura lieu à :

$$h_1 = h_2 = 5t^2 - 20 = 5t^2 - 20t \rightarrow t = 1 \text{ s après le départ de la deuxième balle où 3 secondes après le départ de la première balle.}$$

Le lieu de la rencontre sera à :

$$h = -15 \text{ m (15 m vers le haut, au-dessus de l'origine).}$$



Ex. - 5 - :

Considérons deux corps A et B en chute libre, à l'instant $t = 0$ les deux corps sont à $x = 0$, avec des vitesses initiales opposées en sens et égales en module à 4 m/s.

Trouver l'intervalle de temps qui sépare leur passage à $x_1 = 19,2 \text{ m (g=10 m/s}^2\text{)}$

et leur vitesse en ce point.

SOLUTION :

Calculons la durée que mettra chacun des corps à arriver en x_1 , la différence nous donnera l'avance de l'un sur l'autre au passage de x_1 .

Les équations horaires s'écriront, si on oriente la verticale vers le bas :

$$h_A = 5 t_A^2 + 4t_A = 19,2 \quad h_B = 5t_B^2 - 4t_B = 19,2$$

La solution de l'équation : $5t^2 - 4t - 19,2 = 0$ et $5t^2 + 4t - 19,2 = 0$;
donne $t'_A = 1,6s$ pour A et $t'_B = 2,4s$ pour B

Les deuxièmes racines t''_A et t''_B sont négatives.

$$\text{d'où } \Delta t = t'_B - t'_A = \underline{\underline{0,8s}}$$

Leur vitesse en ce point sera :

$$V_A = 10 t + 4 = 20 \text{ m/s}$$

$$V_B = 10 t - 4 = 20 \text{ m/s.}$$

REMARQUE :

Δt représente le temps que met le corps B à repasser par l'origine des abscisses. Ce qui nous donne une autre manière de résoudre ce problème. Cette méthode n'est valable que dans le cas où les vitesses initiales sont égales en modules.



Ex. - 6 -

On abandonne un mobile en un point O situé à une distance $h=180m$ au-dessus d'un autre point O' . A l'instant $t=2s$, on lance de O' vers le haut un autre mobile avec une vitesse v_0 telle que les deux mobiles aient la même vitesse au niveau où ils se croisent.

A quel instant et à quel niveau auront lieu les passages simultanés des deux mobiles ?

SOLUTION :

Au départ de O' , le mobile O a parcouru :

$$x = \frac{1}{2} g t^2 = 20 \text{ m}$$

et sa vitesse est de :

$$v = g t = 20 \text{ m/s}$$

Si on prend O' comme origine des espaces et le départ de O' origine des dates et que l'on oriente de bas en haut la verticale $O'O$, les équations

tions horaires des deux mobiles s'écriront :

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 - 20t + (180 - 20)$$

$$x' = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t,$$

$$\text{et } v = -gt - 20$$

$$v' = -gt + v_0$$

au croisement on a :

$$x = x' \text{ et } v = v'$$

$$-20t + 160 = v_0t \quad (1)$$

$$-gt - 20 = gt - v_0 \rightarrow v_0 = 20 + 2gt = 20 + 20t \quad (2)$$

d'où en éliminant v_0 de (1) et (2)

$$t(20 + 20t) = 160 - 20t$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$t' = 2s ; t'' < 0$$

$$\underline{\underline{x = 100 \text{ m}}}$$



Ex. - 7 - :

A quelle hauteur maximale peut monter une balle qu'on envoie vers le haut verticalement avec une vitesse de 20 m/s. Quel est le temps qu'elle mettra pour revenir à son point de départ ? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

SOLUTION :

Le mouvement de cette balle est un mouvement uniformément retardé d'équation horaire, si l'on oriente l'axe de la verticale vers le bas :

$$h = +\frac{1}{2}gt^2 - v_0t = 5t^2 - 20t$$

La vitesse va donc diminuer au fur et à mesure que la balle prend de la hauteur, elle s'annulera pour changer de signe, quand $h = h_{\text{max}}$. donc :

$$-v_0^2 = 2gh_{\text{max.}}$$

$$h_{\text{max.}} = \frac{-4.10^2}{20} = -20 \text{ m} \quad (\text{le signe moins veut dire que la balle se déplace dans le sens négatif, vers le haut})$$

L'équation horaire nous permet de calculer le temps que la balle mettra pour revenir à son point de départ :

$$0 = -5t^2 + 20t = t(20 - 5t)$$

$$t' = 0 \quad t'' = 4s$$

La solution $t' = 0$ vient du fait que la balle était à l'origine des espaces à $t = 0$ et elle y revient 4 secondes après.



Ex. - 8 - :

Une masse tombe du point A sur le sol une seconde avant qu'une autre ne tombe du point B placé au-dessous de A sur la même verticale. La distance AB est de 44,1 m.

- 1) Quels seront les temps au bout desquels les deux masses atteindront le sol en même temps ?
- 2) Quelles seront les distances des points A et B au sol ?
- 3) Quelles seront les vitesses des deux masses lorsqu'elles atteindront le sol ? ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$).

SOLUTION :

- 1) Prenons A comme origine des espaces et le départ de B origine des dates :

$$x_A = \frac{1}{2}gt^2 + V_{oA}t + x_{oA}$$

$$V_{oA} = gt = 9,8 \text{ m/s et } x_o = \frac{g}{2}t^2 = 4,9$$

$$x_A = \frac{1}{2}gt^2 + 9,8t + 4,9$$

$$x_B = \frac{1}{2}gt^2 + V_{oB}t + x_{oB} \text{ où } V_{oB} = 0 \text{ et } x_{oB} = 44,1 \text{ m}$$

$$x_B = \frac{1}{2}gt^2 + 44,1$$

A leur rencontre au sol on a :

$$x_A = x_B = \frac{1}{2}gt^2 + 44,1 = \frac{1}{2}gt^2 + 9,8t + 4,9$$

$$t = \frac{44,1 - 4,9}{9,8} = \underline{\underline{4s}} \text{ pour B et } \underline{\underline{5s}} \text{ pour A.}$$

$$2) h_A = \frac{1}{2}gt^2 = 4,9 \cdot 25 = 122,5 \text{ m}$$

$$h_B = \frac{1}{2}gt^2 = 4,9 \cdot 16 = 78,4 \text{ m}$$

$$3) v_A = gt = 9,8 \times 5 = 49 \text{ m/s}$$

$$v_B = gt = 9,8 \times 4 = 39,2 \text{ m/s.}$$



Ex. - 9 - :

Un corps en chute libre sur une verticale $X'OX$ orientée vers le bas a une vitesse de 54 m/s à l'abscisse 145 m. Sachant que pour $t=0$, $x_0=0$.

- 1) Déterminer la date et la vitesse correspondantes à $h = 540$ m.
- 2) Déterminer la hauteur et la vitesse correspondantes à $t=8s$, $g=10m/s^2$

SOLUTION :

C'est un mouvement en chute libre d'équation horaire :

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + V_0t \text{ où } V_0, \text{ est telle que :}$$

$$V^2 - V_0^2 = 2gh$$

$$V_0^2 = V^2 - 2gh = 16$$

$$V_0 = \pm 4 \text{ m/s}$$

Nous sommes amenés à envisager les deux cas :

$V_0 = -4 \text{ m/s} < 0$: Le corps a été jeté vers le haut.

$V_0 = +4 \text{ m/s} > 0$: Le corps a été jeté vers le bas.

a) $V_0 > 0$

L'équation horaire : $h = 5t^2 + 4t$ et $v = 10t + 4$

1) Si $h = 540$ m, on a : $5t^2 + 4t - 540 = 0$

$$t' = 10s \text{ (} t'' < 0 \text{) et } v = 104 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ pour } t = 8s \quad h &= (5 \cdot 64) + 4 \cdot 8 = \underline{\underline{352 \text{ m}}} \\ v &= (10 \cdot 8) + 4 = \underline{\underline{84 \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

b) $V_0 < 0$ donc $h = 5t^2 - 4t$; $v = gt - 4$

1) Si $h = 540$ m on a : $540 = 5t^2 - 4t$

$$t' = \underline{\underline{10.8 \text{ s}}} \text{ (} t'' < 0 \text{)}$$

$$\text{et } v = (10 \cdot 10,8) - 4 = 104 \text{ m/s}$$

$$2) \text{ pour } t = 8s \quad h = (5 \cdot 64) - (4 \cdot 8) = \underline{\underline{288 \text{ m}}}$$

$$v = (10 \cdot 8) - 4 = \underline{\underline{76 \text{ m/s}}}$$



Ex. - 10 - :

Un mobile A est abandonné sans vitesse initiale. Après une chute libre de 20 m, il croise un mobile B lancé du sol à la date exacte du départ

de A avec une vitesse initiale dirigée vers le haut.

A l'instant du croisement, les vitesses A et B sont égales en modules et de signes opposés.

- 1) Quelle est l'abscisse de leur croisement ?
- 2) Quelle est l'abscisse initiale de A ?
- 3) Quelle hauteur atteindra B avant de redescendre ?
- 4) Quel intervalle de temps sépare les deux arrivées au sol ($g=10\text{m/s}^2$) ?

SOLUTION :

1)

Calculons le module des vitesses au point de croisement :

$$V_{1A}^2 = 2gx_A = 2 \times 10 \times 20 \longrightarrow V_{1A} = 20\text{m/s}$$

Le temps que mettront les deux corps pour se croiser sera d'après l'équation horaire de A :

$$x_A = 5t^2 = 20$$

$$t = 2\text{s}$$

Ces deux résultats nous permettront de calculer la vitesse initiale de B et x_B abscisse de leur croisement, on a :

$$v = gt + v_{0B} \text{ avec}$$

$$v_{0B} = v - gt = -20 - (2 \cdot 10) = -40\text{m/s}$$

$$V_{1B}^2 - V_{0B}^2 = 2gx_B$$

$$x_B = \frac{400 - 1600}{20} = -60\text{m}$$

2) L'abscisse initiale de A est :

$$x_{0A} = x_B + x_A = -60 + -20 = -80\text{m}$$

$$3) 0 - V_{0B}^2 = 2gx_{B \text{ max.}}$$

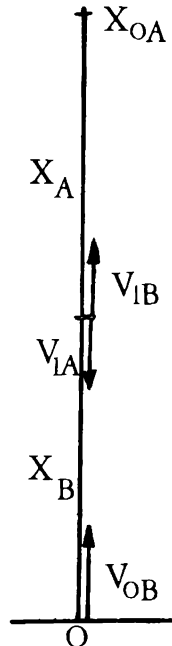
$$x_{B \text{ max.}} = -\frac{1600}{2 \cdot 10} = -80\text{m}$$

4) Les équations horaires s'écrivent :

$$x_A = \frac{1}{2}gt^2 - 80 \quad x_B = \frac{1}{2}gt^2 - 40t$$

En posant $x_A = x_B = 0$; on a : $t_A = 4\text{s}$ et $t_B = 8\text{s}$.

Donc l'intervalle de temps séparant les arrivées des deux corps au sol sera : $t = t_B - t_A = 4\text{s}$



Ex. - 11* :

Une bille tombant verticalement passe aux points A_1, A_2, A_3 aux instants t_1, t_2, t_3 , comptés à partir d'une origine des temps arbitrairement choisie. On appelle h_1 , l'espace OA_1 parcouru par la bille à partir de sa position de départ, h_2 l'espace OA_2 et h_3 l'espace OA_3 . On demande de calculer en fonction de h_2, h_3, t_1, t_2 , et t_3 :

- 1) L'accélération de la pesanteur.
- 2) La hauteur h_1 et le temps t_0 écoulé depuis le départ de la bille jusqu'à son passage en A_1 .
- 3) Quel temps mettrait la bille pour parcourir 1 m à partir de A_1 . Application numérique : $A_1 A_2 = 34,3\text{cm}$, $A_2 A_3 = 44,1\text{cm}$ $t_1 = 5,4\text{ s}$; $t_2 = 5,5\text{ s}$; $t_3 = 5,6\text{ s}$.

SOLUTION :

- 1) Calcul de l'accélération :

Soit $A_0(h_0)$ le point où la bille se trouvait à l'instant $t=0$ et v_0 la vitesse en A_0 . On peut écrire :

$$h_3 = \frac{1}{2} g t_3^2 + V_0 t_3 + h_0 \quad (1)$$

$$h_2 = \frac{1}{2} g t_2^2 + V_0 t_2 + h_0 \quad (2)$$

$$h_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 + V_0 t_1 + h_0 \quad (3)$$

$$A_2 A_1 = h_2 - h_1 = \frac{1}{2} g (t_2^2 - t_1^2) + V_0 (t_2 - t_1) \quad (4)$$

$$A_2 A_3 = h_3 - h_2 = \frac{1}{2} g (t_3^2 - t_2^2) + V_0 (t_3 - t_2) \quad (5)$$

L'équation (4) nous donne :

$$V_0 = \frac{(h_2 - h_1) - \frac{1}{2} g (t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1} \quad (6)$$

$$\text{d'où : } g = \frac{2((h_3 - h_2)(t_2 - t_1) - (h_2 - h_1)(t_3 - t_2))}{(t_3^2 - t_2^2)(t_2 - t_1) - (t_2^2 - t_1^2)(t_3 - t_2)}$$

$$\text{A.N. } g = \frac{2(4,41 - 3,43) 10^{-2}}{0,111 - 0,109} = 9,8 \text{ m/s}^2$$

- 2) Calcul de h_1 :

Calculons la vitesse v_1 que la bille a, en A_1 .

Pour cela, écrivons que la distance $A_1 A_2$ a été parcourue en $0,1\text{ s}$

$$A_1 A_2 = \frac{1}{2} g t^2 + v_1 t \quad (7)$$

$$v_1 = \frac{34,3 \cdot 10^{-2} - 4,9 \cdot 10^{-2}}{0,1} = 2,94 \text{ m/s}$$

Ainsi h_1 peut se calculer à partir :

$$h = \frac{V_1^2}{2g} = \frac{(2,94)^2}{2 \times 9,8} = 0,441 \text{ m} = \underline{\underline{\underline{\underline{44,1 \text{ cm}}}}}$$

$$\text{et } t_o = \frac{v_1}{g} = \underline{\underline{\underline{0,3 \text{ s}}}}$$

REMARQUE : Ce dernier résultat nous permet de voir que l'on a choisi l'origine des temps $(5,4 - 0,3) = 5,1 \text{ s}$ avant de laisser tomber la bille.

3) Calcul de θ_1 , temps que met la bille à parcourir 1 m à partir de A_1 :

D'après (7) on a :

$$1 = \frac{1}{2} g \theta_1^2 + v_1 \theta_1$$

$$4,9 \theta_1^2 + 2,94 \theta - 1 = 0$$

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\hat{\theta} \cong 0,24 \text{ s}}}}}$$



Ex. - 12* :

Un disque circulaire pouvant tourner autour d'un axe horizontal passant par son centre porte N ouvertures très petites équidistantes sur une circonférence. Il est placé juste devant l'objectif d'un appareil photographique de façon que, pendant la rotation, les centres des ouvertures périphériques rencontrent l'axe principal de l'objectif et que les points de rencontre puissent être confondus avec le centre optique de l'objectif.

Ce disque est animé d'un mouvement circulaire uniforme et tourne avec une vitesse de n tours par seconde ; devant l'objectif, on laisse tomber suivant une verticale rencontrant l'axe optique, une petite bille fortement éclairée en chute libre.

1) Calculer l'intervalle de temps θ qui sépare les passages de deux ouvertures successives devant le centre optique de l'objectif.

2) Montrer qu'après le développement de la plaque, on trouvera sur celle-ci des points images de la bille, que l'on désignera par la suite des lettres a, b, c, d , etc... et que les distances ab, bc, cd , etc... augmentent en progression arithmétique. Connaissant l'accélération g de la pesanteur et le grandissement γ de l'objectif, calculer la raison r de la progression.

- 3) On donne $N = 10$ et $n = 5$; $ab = 4,018 \text{ cm}$; $bc = 4,214 \text{ cm}$;
 $cd = 4,410 \text{ cm}$; distance focale de l'objectif : $f = 20 \text{ cm}$. Dis-
 tance de la verticale de chute à l'objectif : $p = 60 \text{ cm}$. Se servir
 de ces données pour calculer g .
- 4) Calculer la vitesse de la bille au moment de l'enregistrement du
 point a sur la plaque.
- Calculer également la durée de chute qui s'est écoulée entre le
 moment du lâcher de la bille et le moment de l'enregistrement
 du point a.

SOLUTION :

- 1) On peut dire qu'il y a : $n.N = 50$ ouvertures qui passent devant
 l'objectif, donc :

$$\theta = \frac{1}{nN} = \frac{1}{50} \text{ s}$$

- 2) Le grandissement est tel que : $\gamma = \frac{P'}{P}$ où P' et P sont respective-
 ment les distances de l'image et de l'objet à l'objectif.
 Mais P' est calculée à partir de :

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = \frac{1}{f} ; P' = 20 \text{ cm.}$$

Donc $\gamma = -\frac{1}{2}$, l'image obtenue est ~~réelle~~ virtuelle, renversée et réduite de
 moitié :

donc les distances ab , bc et cd , dans la réalité, mesurent :

$$AB = 4,018 \times 2 = 8,036 \text{ cm} = 8,036 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

$$BC = 4,214 \times 2 = 8,428 \text{ cm} = 8,428 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

$$CD = 4,410 \times 2 = 8,820 \text{ cm} = 8,820 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

La raison r est égale à : $r = g\theta^2$.

$$8,820 - 8,428 = 8,428 - 8,036 = 0,392 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

$$3) \text{ D'où } g = \frac{r}{\theta^2} = 0,392 \cdot 10^{-2} \times (50)^2 = \underline{\underline{9,80 \text{ m/s}^2}}$$

- 4) Calcul de v_a :

Si l'on considère la distance AB parcourue en $1/50$ s. On peut
 écrire :

$$x_{AB} = \frac{1}{2} g \left(\frac{1}{50}\right)^2 + v_A \left(\frac{1}{50}\right) = 8,036 \cdot 10^{-2}$$

$$v_a = \frac{8,036 \cdot 10^{-2} - \frac{1}{2} \times 9,8 \left(\frac{1}{50}\right)^2}{1/50} = 3,92 \text{ m/s}$$

La durée de chute qui a précédé l'enregistrement du point a : $t = v_a/g = 0,4 \text{ s.}$



Ex. - 13* :

- 1) Un diapason inscrit ses oscillations sur une plaque enfumée mobile. On mesure les longueurs occupées sur la plaque par l'enregistrement de 5 vibrations consécutives et l'on trouve pour ces longueurs : $AB=13\text{mm}$; $BC = 29\text{mm}$; $CD = 45\text{mm}$; $DE = 61\text{mm}$ et $EF = 77\text{mm}$. Montrer que ces mesures vérifient que le mouvement de la plaque est uniformément accéléré.
- 2) On inscrit en même temps sur la plaque des signaux donnés par un chronomètre et séparés par un intervalle de $1/5$ de seconde. Le premier de ces signaux s'inscrit en un point M situé entre A et B tel que $AM=4,5\text{mm}$; le suivant coïncide avec le point F.
Calculer le nombre d'oscillations par seconde du diapason, l'accélération du mouvement de la plaque et sa vitesse au moment de l'inscription du point A.

SOLUTION :

La plaque est animée d'un mouvement uniformément varié d'accélération γ ; étant donné que les espaces parcourus pendant les intervalles de temps T (oscillation du diapason) égaux et consécutifs, forment une progression arithmétique de raison $r = \gamma T^2$.

$$r = FE - ED = ED - DC = DC - CB = CB - BA = 16.10^{-3}\text{m}.$$

On a donc :

$$\gamma T^2 = 16.10^{-3} \quad (1)$$

– Ecrivons que la distance MF a été parcourue pendant $1/5\text{s}=0,2\text{s}$:

$$MF = (8,5 + 29 + 45 + 61 + 77) 10^{-3} = \frac{1}{2} \gamma (0,2)^2 + 0,2 V_m$$

$$220,5.10^{-3} = 2.10^{-2} \gamma + 0,2 V_m \quad (2)$$

où V_m est la vitesse en M

– Ecrivons que la distance AF a été parcourue pendant 5 périodes T du diapason :

$$225.10^{-3} = \gamma 12,5. T^2 + 5T V_A \quad (3)$$

Où V_A est la vitesse en A.

– Enfin on peut écrire que :

$$V_m^2 - V_A^2 = 9.10^{-3} \cdot \gamma \quad (4)$$

Les équations (1), (2), (3) et (4) forment un système de quatre inconnues T , γ , V_A et V_m .

$$\text{d'après (2) : } V_m = \frac{0,2205 - 0,02 \cdot \gamma}{0,2} = (1,1025 - 0,1 \gamma) \quad (5)$$

Remplaçons T par sa valeur tirée de (1), dans (3), d'où on tire V_A :

$$V_A = \frac{0,225 - (0,016 \cdot 12,5)}{(5,0,1264) / \sqrt{\gamma}} = \frac{0,025}{0,632} \sqrt{\gamma} = 0,0395 \sqrt{\gamma} \quad (6)$$

D'après (6), (5) et (4), on peut écrire :

$$(1,1025 - 0,1 \gamma)^2 - (0,0395 \sqrt{\gamma})^2 = 0,009 \cdot \gamma$$

On obtient une équation du 2ème degré :

$$\gamma^2 - 23,1 \gamma + 121,55 = 0$$

qui nous donne :

$$\gamma_1 = 8,15 \text{ m/s} \text{ et } \gamma_2 = 14,95 \text{ m/s}^2$$

γ_2 n'est qu'une solution mathématique. On l'exclura étant donné que physiquement elle n'est pas acceptable, étant plus grande que $g=10$.

La plaque dans sa chute est guidée par des câbles qui la freinent d'où une accélération inférieure à g. Ainsi :

$$\gamma = 8,15 \text{ m/s}$$

La période d'oscillation du diapason sera :

$$T^2 = \frac{16 \cdot 10^{-3}}{8,15} \rightarrow T \cong 22,5 \text{ hertz.}$$

Enfin :

$$V_A \cong \underline{\underline{0,11 \text{ m/s}}} \text{ et } V_M \cong \underline{\underline{0,29 \text{ m/s}}}$$



Chapitre quatrième

APPLICATION DE LA RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE AU MOUVEMENT RECTILIGNE

FORMULAIRE

Tension du câble :

$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{\gamma}$$

Mouvement d'un projectile :

$$z = \frac{g}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} x^2 + \operatorname{tg} \alpha \cdot x$$

Portée :

$$x_m = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (g > 0)$$

Flèche :

$$h_m = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (g > 0)$$

Machine d'Atwood :

$$\gamma = g \frac{m}{2M + m}$$



Ex. - 1 - :

1) Calculer l'espace parcouru par un corps de masse m et sa vitesse après 0,6 s de chute libre. Sa chute est guidée par un câble qui produit un frottement $\vec{F}_R$, opposé au mouvement tel que l'espace parcouru pendant 0,6s est égal à 1,59 m.

2) Trouver $\vec{F}_R$ pour une masse de 100g . ($g=9,8\text{m/s}^2$)

SOLUTION :

1) L'espace parcouru et la vitesse en chute libre :

$$x = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} 9,8 (0,6)^2 = 1,76 \text{ m}$$

$$v = g t = 9,8 \times 0,6 = 5,88 \text{ m/s}$$

2) La nouvelle accélération est égale à :

$$\gamma = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \times 1,59}{(0,6)^2} = 8,83 \text{ m/s}^2$$

On a : $mg - F_R = \gamma m$ où F_R , Force de frottement.

$$F_R = m(g - \gamma) = 0,1 (9,8 - 8,83) = 0,097 \text{ N}$$

Ex. - 2* :



On se propose de communiquer à un projectile une vitesse de 10Km/s. Ce projectile, destiné à devenir un satellite de la terre, emportera éventuellement des êtres vivants susceptibles de supporter une accélération γ de 70m/s^2 .

1) Montrer que la méthode décrite par Jules VERNE est inapplicable. Cet auteur préconisait l'emploi d'un canon géant. On prendra pour longueur du tube $\ell = 250 \text{ m}$ et l'on calculera l'accélération qu'aurait le projectile à l'intérieur du tube en y supposant le mouvement uniformément accéléré.

2) a - On communique au projectile la vitesse de 10 Km/s au moyen d'une fusée qui se déplace d'un mouvement uniformément accéléré, d'accélération $\gamma_0 = 70 \text{ m/s}^2$. Quel est le parcours nécessaire à l'acquisition de la vitesse désirée ?

b - En admettant que la fusée quitte la terre perpendiculairement au sol, quel sera, au moment du départ, le poids apparent d'un corps de 60 kg situé à l'intérieur du projectile ? ($g = 10 \text{ m/s/s}$, au niveau du sol).

SOLUTION :

1) L'accélération dans le tube du canon devrait être égale à :

$$\gamma = \frac{V^2}{2x} = \frac{10^8}{500} = 2 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2, \text{ ce qui n'est pas supportable par des êtres vivants.}$$

2) a - La distance nécessaire est :

$$x = \frac{V^2}{2\gamma_0} = \frac{10^8}{140} = 7,1 \cdot 10^5 \text{ m} \cong \underline{\underline{700 \text{ Km}}}$$

b - Le poids apparent au moment du départ est :

$$P = M(\gamma_0 + g) = 60(70 + 10) = 4800 \text{ N}$$

$$P_0 = Mg = 600 \text{ N}$$

Au départ, le poids apparent est 8 fois plus grand qu'au repos.



Ex. - 3 - :

Une automobile roulant à 36 Km/h freine sur 40 m avant de s'arrêter.

1) Trouver la durée du mouvement.

2) Trouver la force retardatrice si sa masse est de 1 tonne.

SOLUTION :

$$1) v = \frac{36000}{3600} = 10 \text{ m/s}$$

$$\text{La décélération est donc : } \frac{-V^2}{2x} = \gamma = \frac{-100}{2 \cdot 40} = -1,25 \text{ m/s}^2$$

Ainsi on peut écrire :

$$V = \gamma t + V_0.$$

$$t = \frac{-V_0}{\gamma} = \frac{-10}{-1,25} = \underline{\underline{8 \text{ s}}}$$

2) La force retardatrice des freins :

$$F_R = M\gamma = -1,25 \times 10^3 = -\underline{\underline{1250 \text{ N}}}$$



Ex. - 4 - : Un plan incliné fait un angle de 30° avec le plan horizontal ; d'un point O de la droite d'intersection des deux plans, on lance vers le haut, dans le plan incliné, suivant sa ligne de plus grande pente, avec une vitesse initiale de 10 m/s un petit corps pesant qui glisse sans frottement sur le plan incliné.

- 1) Trouver la position du point le plus élevé de la trajectoire du mobile.
- 2) Lieu géométrique de ce point quand l'angle du plan incliné avec le plan horizontal varie de 0° à 90° ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

SOLUTION :

- 1) La décélération que subit le mobile :

$$\gamma = -g \sin \alpha = -10 \cdot 0,5 = -5 \text{ m/s}^2$$

$$OA = \frac{-V^2}{2\gamma} = \frac{-100}{-10} = 10 \text{ m}$$

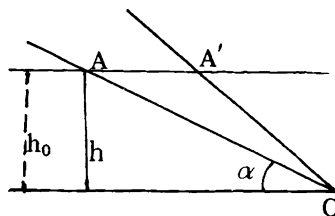
- 2) La hauteur h qui correspond au plus haut point de la trajectoire est égale à :

$$h = OA \cdot \sin \alpha$$

$$h = \frac{-V^2 \sin \alpha}{-2g \sin \alpha} = \frac{-V^2}{-2g} ; \text{ Elle est indépendante de } \alpha$$

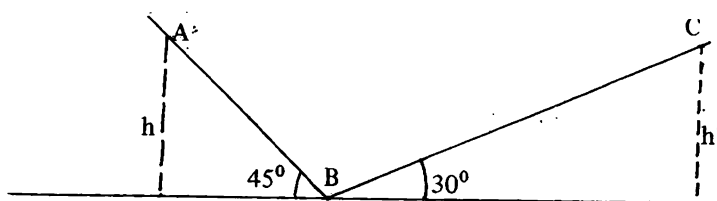
Le lieu géométrique de A sera, donc l'horizontale à hauteur :

$$h_0 = \frac{V^2}{2g} = \frac{100}{2 \cdot 10} = 5 \text{ m}$$



• Ex. 5 - :

- 1) Partant de A un chariot en mouvement de translation dévale le plan AB incliné à 45° sur l'horizontale, sachant que $AB = 2 \text{ m}$, calculer sa vitesse en B (tous les frottements sont négligés).



- 2) Au passage en B, grâce à un raccordement convenable, le mobile aborde, sans perdre de vitesse, un deuxième plan BC d'inclinaison 30° . Calculer la distance BC parcourue sur ce plan par le chariot avant son retour vers B.
- 3) Comparer les hauteurs h et h' .

- 4) Le résultat dépend-il des angles $ABH=\alpha$ et $CBH'=\beta$? Etudier le problème dans le cas général.

SOLUTION :

$$1) \text{ La vitesse en B : } V_B = \sqrt{2 \gamma x} = \sqrt{2g \sin \alpha \cdot x}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2} = 5,31 \text{ m/s}$$

- 2) La distance BC est égale à :

$$BC = \frac{V_B^2}{2g \sin \alpha} = \frac{(5,31)^2}{2 \cdot 10 \cdot 0,5} = 2,81 \text{ m}$$

$$3) h = 2,81 \cdot \sin 30 \approx 1,405 = 2 \times \sin 45 = h'$$

$$h = h'$$

- 4) Dans le cas général : h' hauteur à laquelle la vitesse du chariot s'annule ne dépend pas de α et β . Elle est égale à :

$$h = h' = \frac{V^2}{2g}$$



Ex. - 6* :

Une automobile pesant 600 Kg aborde à la vitesse de 72 Km/h une côte dont la pente est de 4% (on s'élève de 4cm/m de route).

- 1) En supposant les frottements négligeables, quelle est la force supposée constante que devra exercer le moteur pour conserver la vitesse de 72 Km/h ?
- 2) Les résistances passives étant constantes et évaluées à 30 Kgf par tonne, quelle est la puissance développée par le moteur pendant la montée à la vitesse constante de 72 Km/h.
- 3) A un moment donné le conducteur arrête son moteur sans serrer le frein. En supposant que les résistances passives demeurent constantes, quelle sera la distance parcourue par l'automobile avant de s'arrêter sur la rampe de 4% ? Au bout de combien de temps après l'arrêt du moteur se produit l'arrêt du véhicule ?
- 4) Quelle serait alors la force de freinage constante qui permettrait un arrêt de la voiture sur une distance de 20 m ? Durée de ce freinage ? On prendra : $g = 10 \text{ u.SI.}$

SOLUTION :

1) La force du moteur ne doit équilibrer que la composante du poids tangentielle au plan incliné, c'est-à-dire :

$$F_1 = P \cdot \sin \alpha = 6 \cdot 10^3 \times 0,04 = 240 \text{ N}$$

=====

2) La force du moteur doit à présent équilibrer la force de frottement et $P \cdot \sin \alpha$,

$$F_2 = F_R + P \cdot \sin \alpha$$

$$\text{avec } F_R = \frac{300 \times 600}{1000} = 180 \text{ N}$$

=====

$$\text{d'où } F_2 = 240 + 180 = 420 \text{ N}$$

=====

La puissance du moteur à 72 Km/h = 20 m/s

$$P = 420 \times 20 = 8400 \text{ W} = 8,4 \text{ Kw} \cong 11,43 \text{ Ch.}$$

3) Quand le moteur est arrêté, sans freiner, l'automobile entame un mouvement uniformément décéléré avec :

$$\gamma = \frac{F_2}{M} = \frac{-420}{600} = -0,7 \text{ m/s}^2$$

La distance d , parcourue avant l'arrêt sera :

$$d = \frac{-V^2}{2 \gamma} = \frac{400}{2 \times 0,7} = 285,7 \text{ m}$$

Le temps nécessaire à l'arrêt :

$$t = \frac{v}{\gamma} = \frac{20}{0,7} \cong 28,6 \text{ s}$$

4) Si la voiture s'arrête sur 20 m, l'automobile a une décélération de :

$$\gamma' = \frac{-V^2}{2d'} = \frac{-400}{40} = -10 \text{ m/s}^2$$

Donc on peut écrire, pour la force de frein f_R :

$$F_R + f_R + mg \sin \alpha = m\gamma'$$

$$\text{d'où } f_R = 6 \cdot 10^3 + 180 + 240 = 6580 \text{ N}$$

=====

La durée de freinage sera :

$$t' = \frac{v}{\gamma'} = \frac{20}{10} = 2 \text{ s}$$



- Ex. - 7* :**
- 1) Un Wagon de 20 tonnes est lâché sans vitesse initiale sur une voie dont la pente est de 2%. En négligeant les frottements et la résistance de l'air, écrire l'équation du mouvement du wagon le long de la voie. Calculer en kilomètres/heure, la vitesse acquise à 500 m du point de départ. ($g=10\text{m/s/s}$).
 - 2) Le wagon ayant ainsi parcouru 500 m, les freins sont serrés ; leur action équivaut à une force opposée du vecteur vitesse et égale au 1/10 du poids du wagon.
Quel est à partir de cet instant, le chemin parcouru par le wagon jusqu'à l'arrêt complet sur une voie horizontale ?
 - 3) Une masse ponctuelle est suspendue par un fil au toit du wagon. On admet que dans chaque phase du mouvement, cette masse atteint une position d'équilibre et que le pendule ainsi formé est immobile par rapport aux parois du wagon. Calculer en degrés et minutes, l'angle que fait le fil avec la verticale dans les phases 1 et 2 du mouvement.

SOLUTION :

1) L'équation horaire : $x = \frac{1}{2} \gamma t^2$.

où $\gamma = g \sin \alpha = 10 \times 0,02 = 0,2 \text{ m/s}^2$

La vitesse s'écrira :

$V^2 = 2\gamma x = 0,4 \cdot 500 = 200$

$V \cong 14,1 \text{ m/s} \cong \frac{14,1 \cdot 3600}{1000} \cong 50 \text{ Km/h}$

- 2) Les freins sont équivalents à une force opposée au mouvement, d'intensité :

$F' = \frac{P}{10} = \frac{20 \cdot 10^4}{10} = 20 \cdot 10^3 \text{ N}$

La décélération est donc égale à : $\gamma' = \frac{F'}{M} = \frac{-20 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} = -1 \text{ m/s}^2$

Le chemin parcouru avant l'arrêt complet sera :

$-V^2 = 2 \gamma' x'$

d'où : $x' = \frac{-V^2}{2 \gamma'} = \frac{-200}{-2} = 100 \text{ m}$

3) $\text{Tg} \alpha = \frac{\gamma}{g} = \frac{0,2}{10} = 0,02$

$\alpha = 1^\circ 8'$ (dans le sens opposé au mouvement)

$\text{Tg} \alpha' = \frac{\gamma'}{g} = \frac{-1}{10} = -0,1$

$\alpha' = 5^\circ 42'$ (dans le sens du mouvement).



Ex. - 8 - :

Une voiture de masse $M = 1\text{ t}$, tire une remorque de masse $m = 500\text{ kg}$. L'ensemble atteint une vitesse de 72 Km/h en 100 s sur une route horizontale.

- 1) Trouver la force F_1 , qu'exerce la voiture sur la remorque pendant cette phase de démarrage.
- 2) Lancée à cette vitesse constante, la résistance de l'air et les forces de frottement de la remorque opposent à la voiture une force F_R égale au $1/10$ du poids de la remorque. Quelle est la force F_2 qu'exerce la voiture sur la remorque ?
- 3) La remorque n'est pas équipée de freins autonomes, trouver la force F_3 qu'elle exerce sur la voiture si l'ensemble est arrêté au bout de 50 m de freinage.
- 4) La remorque est équipée de freins autonomes, quelle force F_{FR} doivent développer ces derniers pour que F_3 soit nulle. L'arrêt a lieu comme au (3) et les forces résistantes sont celles du (2).
- 5) Reprendre le problème pour chacun des deux cas :
 - a) Montée d'une côte à 2% .
 - b) Descente d'une pente à 2% .

SOLUTION :

- 1) Calcul de F_1 :

L'accélération au démarrage est égale à :

$$\gamma = \frac{20}{100} = 0,2\text{ m/s}^2$$

$$F_1 = m \cdot \gamma = 5 \cdot 10^2 \cdot 0,2 = \underline{\underline{100\text{ N}}}$$

- 2) Si le mouvement est uniforme, la remorque opposera une force F_2 égale aux forces de frottements F_R :

$$F_2 = F_R = \frac{P}{10} = \frac{5000}{10} = \underline{\underline{500\text{ N}}}$$

- 3) La décélération est égale à :

$$\gamma' = \frac{-400}{2 \times 50} = -4\text{ m/s}^2 \text{ et l'on a :}$$

$$F_3 - F_R = m\gamma' \rightarrow F_3 = F_R + m\gamma' = 500 - 2000 = -1500 \text{ N}$$

F_3 est négative : ce n'est pas la voiture qui tire la remorque mais cette dernière qui la pousse.

4) Si la remorque est équipée de freins :

$$-F_R - F_{FR} = m\gamma'$$

$$-F_{FR} = m\gamma' + F_R = -2000 + 500 = -1500 \text{ N}$$

$$F_{FR} = -F_3 = 1500 \text{ N}$$

5) a) La composante du poids va s'ajouter comme force résistante :

$$1) P' = P \sin \alpha = 5000 \cdot 0,02 = 100 \text{ N}$$

$$F'_1 - P' = m\gamma$$

$$F'_2 = 200 \text{ N}$$

$$2) F'_2 = \frac{P}{10} + P' = 600 \text{ N}$$

$$3) F'_3 - F_R - P' = m\gamma'$$

$$F'_3 = + 500 + 100 - 2000 = -1400 \text{ N}$$

$$4) F'_{FR} = 1400 \text{ N}$$

b) P' va être une force motrice d'où :

$$1) F''_1 + P' = m\gamma$$

$$F''_1 = m\gamma - P' = 0$$

$$2) F''_2 - F_R + P' = 0$$

$$F''_2 = F_R - P' = 500 - 100 = 400 \text{ N}$$

$$3) F''_3 - F_R + P' = m\gamma'$$

$$F''_3 = F_R - P' + m\gamma' = 500 - 100 - 2000 = -1600 \text{ N}$$

$$4) F''_{FR} = 1600 \text{ N}$$



Ex. - 9*:

Un train se compose de 10 voitures identiques dont chacune à une masse de 50t remorquées par une locomotive pesant 100t. Il démarre sur une voie rectiligne et horizontale sous l'action d'une force F supposée constante et atteint en 3 minutes une vitesse de 108 Km/h.

1) Calculer l'accélération du train, la force de traction F développée par le moteur de la locomotive, la force de traction F_t appliquée sur la première voiture et le chemin parcouru pour obtenir la vitesse en question, en supposant négligeables les résistances passives.

2) La dernière voiture est accrochée au reste du train par un dynamomètre ; qu'indique l'appareil au cours du démarrage ? Montrer que les tensions transmises par les barres d'attelage qui relient les voitures croissent en progression arithmétique du dernier véhicule à la locomotive ; calculer la raison de cette progression, en négligeant comme au paragraphe 1.) les résistances passives.

3) Le train roulant sur une voie horizontale à la vitesse constante de 108 Km/h, la locomotive développe dans ces conditions une puissance de 3000 KW ; évaluer en newton par tonne de convoi la force horizontale opposée à la vitesse qui représente l'ensemble des résistances de frottement que l'on avait précédemment négligées.

4) Le train lancé à la vitesse précédente est arrêté en 30s ; les résistances propres au convoi étant supposées les mêmes qu'au 3.) paragraphe, quelle doit être la force supplémentaire de freinage à exercer ? Sur quelle longueur aura lieu le freinage ? Que deviendra l'indication du dynamomètre ?

On prendra $g = 9,8 \text{ u.SI.}$

SOLUTION :

1) Calcul de l'accélération : $v = \gamma t$

$$\gamma = \frac{v}{t} = \frac{30}{180} = 0,16 \text{ m/s}^2$$

La force de traction du moteur avec ΣM : la masse totale du train :

$$F = \gamma \cdot \Sigma M$$

$$F = 0,16 (100 \cdot 10^3 + 500 \cdot 10^3) = 9,6 \cdot 10^4 \text{ N}$$

=====

La masse tirée par la locomotive est de 500 tonnes

$$F_1 = 0,16 \cdot 500 \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Le chemin parcouru :

$$x = V^2 / 2\gamma = 900 / 0,32 = 2812,5 \text{ m}$$

2) Soit T_1 , la tension sur la barre d'attelage du dernier wagon de masse m_1 :

$$T_1 = m_1 \gamma \text{ où } m_1 = 50 \cdot 10^3 \text{ Kg, masse d'un wagon}$$

$$T_1 = 50 \cdot 10^3 \cdot 0,16 = 0,8 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Numérotons les wagons de 1 à 10 en commençant par le dernier et ainsi que les tensions. On aura :

$$T_2 = 2 m_1 \gamma$$

$$T_3 = 3 m_1 \gamma$$

.....

$$T_n = n m_1 \gamma$$

On voit bien que les tensions forment une progression de raison r égale à : $r = T_3 - T_2 = T_2 - T_1 = T_1 = m_1 \gamma = 0,8 \cdot 10^4 \text{ N}$

3) Calcul de la force de frottement F_R :

$$\text{Le moteur développe une force de traction } F_T : F_T = \frac{P}{V}$$

où P est la puissance et V la vitesse du train.

$$F_T = \frac{3 \cdot 10^6}{30} = 10^5 \text{ N}$$

Le train roulant à vitesse constante ($\gamma = 0$) on a donc :

$$|F_T| = |F_R|$$

$$F_R = 10^5 \text{ N}$$

$$f_r = \frac{10^5}{600} \cong 166 \text{ N/tonne.}$$

4) Si le train allant à une vitesse de 30m/s est arrêté en 30s, la décélération est égale à :

$$\gamma' = \frac{-v}{t} = \frac{-30}{30} = -1 \text{ m/s}^2$$

On peut écrire : $F_R + F'_R = \gamma' \cdot \Sigma M$; où F'_R = Force supplémentaire de freinage.

$$F'_R = \gamma' \cdot \Sigma M - F_R = -6 \cdot 10^5 + 10^5 = -5 \cdot 10^5 \text{ N}$$

La distance de freinage :

$$x_R = \frac{-V^2}{2\gamma'} = \frac{-900}{-2} = 450 \text{ m}$$

L'indication du dynamomètre :

Dans le cas où le dernier wagon n'est pas équipé de freins autonomes (seule la locomotive freine) on a :

$$T' - (f_r \cdot 50) = -m_o \gamma'$$

$$T' = -50 \cdot 10^3 + (166 \cdot 50) = -41 \cdot 700 \text{ N}$$

T' est de sens contraire que celui trouvé précédemment. Si avant, le wagon tirait sur le reste du train ; au contraire pendant le freinage, il pousse le train. Cette tension est réduite en équipant chaque wagon de freins autonomes.



Ex. - 10 - :

La cage d'un ascenseur de masse $M = 500 \text{ Kg}$ atteint une vitesse de 10 m/s^2 en 5 s ($g = 10$)

- 1) Calculer la tension du câble.
- 2) Le chemin parcouru.

SOLUTION :

- 1) Deux cas peuvent se présenter un démarrage, en montée ou en descente, on écrira donc :

$$T_1 = M(g + \gamma) \text{ (montée) et } T_2 = M(g - \gamma) \text{ (descente)}$$

avec :

$$\gamma = \frac{v}{t} = \frac{10}{5} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$T_1 = 500(10 + 2) = \underline{\underline{6 \cdot 10^3 \text{ N}}}$$

$$T_2 = 500(10 - 2) = \underline{\underline{4 \cdot 10^3 \text{ N}}}$$

- 2) Le chemin parcouru dans les deux cas est tel que :

$$x = V^2 / 2 \gamma = 100 / 4 = \underline{\underline{25 \text{ m}}}$$



Ex. - 11* :

La cabine d'un ascenseur dont le plancher se trouve à 100 m au-dessus du sol se met à descendre en partant du repos ; après 5 m de descente elle acquiert une vitesse de 2 m/s à la seconde avec laquelle elle parcourt 85 m et finalement elle arrive au sol avec une vitesse nulle. Les mouvements des première et troisième phases sont considérés comme uniformément variés.

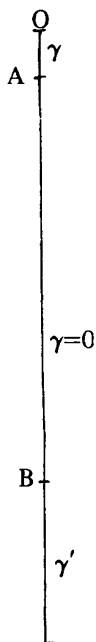
• 1) Etudier les trois phases du mouvement de la cabine et calculer la durée totale de la descente.

2) Un fil élastique de masse négligeable est fixé par un bout au plafond de la cabine et porte, attaché à l'autre bout, une masse marquée de 100g. On suppose que l'allongement du fil est proportionnel à la force de traction et cet allongement est de 1 cm lorsque la force de traction est de 10gf. Quel est l'allongement du fil pendant chaque phase de la descente de l'ascenseur ?

3) Ce même fil élastique, muni de la masse de 100 g, est suspendu à l'intérieur d'une voiture qui démarre sur une voie horizontale avec une accélération constante et égale à 1m/s^2 . Quelle est la position d'équilibre du fil et quel est son allongement pendant la période de démarrage de la voiture ?

On prendra $g = 10\text{u.SI}$ et on négligera sa variation lorsqu'on s'élève de 100 m.

SOLUTION :



1) La phase I est une phase d'accélération où la vitesse passe de 0 à 2 m/s grâce à une accélération :

$$\gamma = \frac{4}{2 \cdot 5} = 0,4 \text{ m/s}^2$$

$$\text{On a : } v = \gamma t \longrightarrow t = \frac{v}{\gamma} = \frac{2}{0,4} = 5\text{s}$$

La phase II est la phase où le mouvement est uniforme et d'équation :

$$x = v \cdot t, \text{ (origine A) d'où l'on tire :}$$

$$x = vt$$

$$\text{d'où } t_2 = \frac{85}{2} = 42,5 \text{ s}$$

A la 3ème phase, la cage est décélérée avec :

$$\gamma' = \frac{-V^2}{2x_3} = -\frac{4}{20} = -0,2 \text{ m/s}^2$$

d'après : $v = \gamma' t + v_0$, sa durée sera égale à :

$$t_3 = \frac{-V_0}{\gamma'} = \frac{-2}{-0,2} = 10\text{s}$$

d'où la durée totale de la descente :

$$\theta = 10 + 42,5 + 5 = 57,5 \text{ s}$$

2) La constante du ressort peut être calculée comme suit :

$$K = \frac{F}{\Delta \ell} = \frac{10^{-1}}{10^{-2}} = 10 \text{ N/m} \quad (\Delta \ell = \text{allongement du ressort}).$$

Pendant la 1ère phase, la force d'inertie est opposée au poids,
 $\gamma > 0$: $T = m(g - \gamma)$

$$T_1 = M(g - \gamma) = 10^{-1} \cdot (10 - 0,4) = 0,96 \text{ N}$$

$$\Delta \ell_1 = \frac{T_1}{K} = \frac{0,96}{10} = 0,096 \text{ m} = 9,6 \text{ cm}$$

Pendant la 2ème phase $\gamma = 0$

$$P = T_2 = 1 \text{ N}$$

$$\Delta \ell_2 = \frac{T_2}{K} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

Quant à la 3ème phase on a $\gamma < 0$:

$$T_3 = 10^{-1} (10 + 0,2) = 1,02 \text{ N}$$

$$\Delta \ell_3 = \frac{1,02}{10} = 0,102 \text{ m} = 10,2 \text{ cm}$$

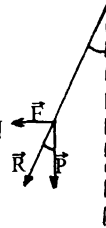
3) Le fil prendra la direction de la résultante $\vec{R}$ du poids et de la force d'inertie, telle que sa direction α avec la verticale soit :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\gamma}{g} = \frac{1}{10}$$

$$\alpha = 5^\circ 50'$$

$$R = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{10^{-1} \cdot 10}{0,99} = \frac{1}{0,99} = 1,01 \text{ N}$$

$$\Delta \ell = \frac{1,01}{10} = 10,1 \text{ cm.}$$



Ex. - 12 - :

A une corde on attache un fardeau. On fait monter ce fardeau une première fois avec une accélération de 2 m/s^2 , une deuxième fois avec une accélération de 8 m/s^2 . Dans le premier cas la tension de la corde est de 100 N. Dans le deuxième cas, la tension est telle que la corde se casse.

1) Trouver la masse du fardeau.

2) Trouver la tension de la corde au moment où elle s'est cassée ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

SOLUTION :

1) On a : $m\gamma = T - mg$

d'où : $m = \frac{T_1}{g + \gamma_1} = \frac{100}{10 + 2} = 8,33 \text{ Kg}$

2) L'expression ci-dessus peut s'écrire :

$$m = \frac{T_1}{g + \gamma_1} = \frac{T_2}{g + \gamma_2}$$

$$T_2 = T_1 \frac{g + \gamma_2}{g + \gamma_1} = 100 \cdot \frac{10 + 8}{10 + 2} = 150 \text{ N}$$



Ex. - 13 - :

Les 2 masses égales A et B d'une machine d'Atwood valent chacune 100g. La surcharge 10g. Quel est l'espace parcouru pendant la troisième seconde de chute sans vitesse initiale (masse de la poulie négligeable).

SOLUTION :

L'accélération est égale à :

$$\gamma = g \frac{m}{2M + m} = 10 \frac{0,01}{0,2 + 0,01} = 0,47 \text{ m/s}^2$$

L'espace parcouru pendant la troisième seconde :

$$d = \frac{1}{2} \gamma t^2 + v_2 t$$

où $t = 1 \text{ s}$ et v_2 la vitesse du système à la fin de la deuxième seconde :

$$v_2 = 0,47 \cdot 2 = 0,94 \text{ m/s}$$

$$d = \left(\frac{1}{2} \times 0,47\right) + 0,94 = 1,17 \text{ m}$$



Ex. - 14 - :

Dans une machine d'atwood, les masses sont chacune de 200g. Une surcharge placée sur l'une d'elles leur fait parcourir 24cm pendant les deux premières secondes de chute. Déterminer la masse de la surcharge ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

SOLUTION :

$$\text{L'accélération est égale à : } \gamma = \frac{2x_0}{t^2} ; \text{ avec } x_0 = 24 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

et $t = 2 \text{ s}$.

$$\gamma = \frac{0,24 \cdot 2}{4} = 0,12 \text{ m/s}^2$$

Cette accélération peut se calculer aussi à partir de la relation :

$$\gamma = g \frac{m}{2M + m_1} = 0,12 ; \text{ où } g = 10 \text{ m/s}^2 \text{ et } M = 0,2 \text{ Kg}$$

$$10 \cdot m = 0,048 + 0,12 \cdot m$$

$$m = 0,0048 \text{ Kg} = \underline{\underline{4,8 \text{ g}}}$$



Ex. - 15 - :

Dans une machine d'Atwood, les deux masses m_1 et m_2 valent 100 g. On place sur A une surcharge m' de 20 g. Sous l'unique action de cette charge, le système se met en marche.

- 1) Calculer son accélération.
- 2) Quel est le chemin parcouru pendant 3s.
- 3) A la fin de la troisième seconde de chute, un curseur annulaire enlève la surcharge. Quel est le chemin parcouru pendant la quatrième seconde ?
- 4) Quelle est la surcharge m'' qu'il faudrait mettre sur B, à la fin de la quatrième seconde, pour que la vitesse du système s'annule à la sixième seconde ? ($g = 10$).

SOLUTION :

1) L'accélération est de la forme :

$$\gamma = g \frac{m'}{m_1 + m_2 + m'}$$

$$\gamma = 10 \frac{20 \cdot 10^{-3}}{0,2 + 20 \cdot 10^{-3}} = 0,9 \text{ m/s}^2$$

2) Le chemin parcouru pendant 3 s est :

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot 9 = \underline{\underline{4,05 \text{ m}}}$$

3) Quand la surcharge est enlevée, le mouvement devient uniforme avec la vitesse acquise à la fin de la troisième seconde :

$$V = \gamma \cdot t = 0,9 \cdot 3 = \underline{\underline{2,7 \text{ m/s}}}$$

Pendant la quatrième seconde, le chemin parcouru sera :

$$x_2 = v \cdot t$$

$$x_2 = 2,7 \cdot 1 = \underline{\underline{2,7 \text{ m}}}$$

4) Calcul de m'' : Pour que la vitesse s'annule à la fin de la sixième seconde, il faut que le système soit décéléré pendant les deux dernières secondes, la décélération alors sera d'après :

$$v = \gamma' t$$

$$\gamma' = \frac{2,7}{2} = 1,35 \text{ m/s}^2$$

La surcharge m'' qu'il faut ajouter sur B sera telle que :

$$\gamma' = 1,35 = g \frac{m''}{m_1 + m_2 + m''}$$

$$1,35 = \frac{10 m''}{0,2 + m''}$$

$$m'' = 0,031 \text{ Kg} = \underline{\underline{31 \text{ g}}}$$



Ex. - 16 - :

Un corps A de masse $m = 100\text{g}$ situé à 4 m au-dessus du sol entraîne dans sa chute un corps B de masse $M = 400\text{g}$ qui glisse sur un plan horizontal supposé illimité. A et B sont reliés par un fil qui passe sur la gorge d'une poulie dont on néglige la masse.

Evaluer ce qu'ils seraient, en l'absence de tout frottement :

- 1) L'accélération γ du système ($g = 10 \text{ u.SI}$).
- 2) La durée du mouvement de A.
- 3) La tension du fil de part et d'autre de la poulie.

SOLUTION :

- 1) Calcul de l'accélération :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{\gamma}. \Sigma m$$

$$\Sigma \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T}' + \vec{T} + \vec{p} = \vec{p}$$

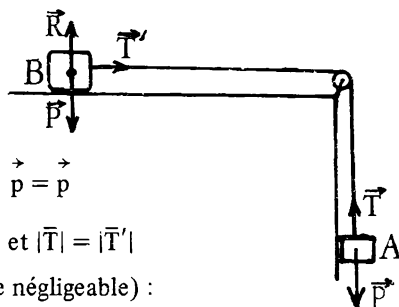
$$\text{Etant donné que } |\vec{P}| = |\vec{R}| \text{ et } |\vec{T}| = |\vec{T}'|$$

(la poulie ayant une masse négligeable) :

$$\Sigma m = M + m ; \text{ d'où } \gamma = g \frac{m}{M+m} = 10 \frac{0,1}{0,4 + 0,1} = \underline{\underline{2 \text{ m/s}^2}}$$

- 2) Le mouvement a une équation horaire : $h = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2$

$$\text{d'où } t = \sqrt{\frac{2h}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{2}} = 2 \text{ s}$$



3) Ecrivons la relation fondamentale de la dynamique pour m :

$$p - T = \gamma m$$

$$T = p - m\gamma = m(g - \gamma) = 0,1 (10 - 2) = \underline{\underline{0,8 \text{ N}}}$$

Où aussi, pour M

$$T' = M \cdot \gamma = 0,4 \cdot 2 = \underline{\underline{0,8 \text{ N}}}$$

$$|T'| = |T| = \underline{\underline{0,8 \text{ N}}}$$



Ex. 17 - :

Un corps A de masse $M_1 = 120\text{g}$ entraîne dans sa chute libre un corps B de masse $M_2 = 80\text{g}$, qui glisse sur un plan incliné de 30° par rapport au plan horizontal ; A et B sont reliés par un fil qui passe sur la gorge d'une poulie dont on néglige la masse. Calculer en négligeant tous les frottements, l'accélération et la tension du fil. ($g = 10 \text{ u.SI}$).

SOLUTION :

1) Calcul de l'accélération :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{\gamma} \cdot \Sigma m$$

$$\Sigma \vec{F} = \vec{R} + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{T} + \vec{T}'$$

Décomposons $\vec{P}_2$ en 2 composantes ; l'une parallèle ($\vec{P}'$) l'autre perpendiculaire ($\vec{P}''$) au plan incliné :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{P}'' + \vec{R} + \vec{P}' + \vec{T} + \vec{T}' + \vec{P}_1$$

$$|\vec{P}''| = |\vec{R}| \text{ et } |\vec{T}'| = |\vec{T}|$$

$$\text{d'où } \Sigma \vec{F} = \vec{P}_1 + \vec{P}' - \vec{P}_2 \sin \alpha$$

Algébriquement, dans le sens choisi, on a :

$$P_1 - P_2 \sin \alpha = (M_1 + M_2) \gamma$$

$$\gamma = g \frac{M_1 - M_2 \sin \alpha}{M_2 + M_1} = 10 \frac{10^{-3}(120 - 0,5 \cdot 80)}{10^{-3}(120 + 80)} = \underline{\underline{4 \text{ m/s}^2}}$$

2) Calcul des tensions de part et d'autre de la poulie : Pour M_1 on peut écrire :

$$P_1 - T = M_1 \cdot \gamma$$

$$T = M_1 (g - \gamma) = 0,12 (10 - 4) = \underline{\underline{0,72 \text{ N}}}$$

pour M_2 on a :

$$T' = M_2 (\gamma + g \sin \alpha) = 8 \cdot 10^{-2} (4 + 5) = \underline{\underline{0,72 \text{ N}}}$$

On a bien : $|T| = |T'|$



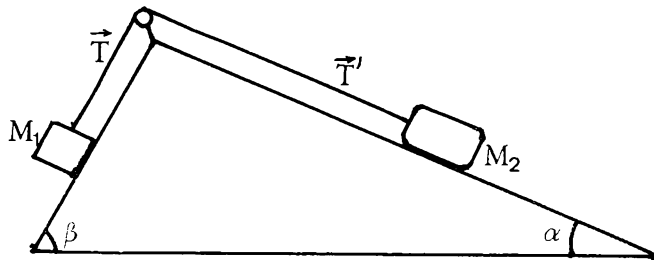
Ex. - 18 - :

Sur deux plans inclinés α et β glissent sans frottement, deux wagons M_1 et M_2 comme l'indique la figure.

1) Trouver l'accélération.

2) Calculer les tensions $\vec{T}$ et $\vec{T}'$, en négligeant la masse de la poulie.

A.N. : $M_1 = 5 \text{ tonnes}$, $M_2 = 1 \text{ tonne}$,
 $\sin \alpha = 0,5$ $\sin \beta = 0,4$ ($\beta = 23^\circ$)
 $g = 10 \text{ m/s}^2$



SOLUTION :

1) Calcul de γ : La résultante des forces est égale à :

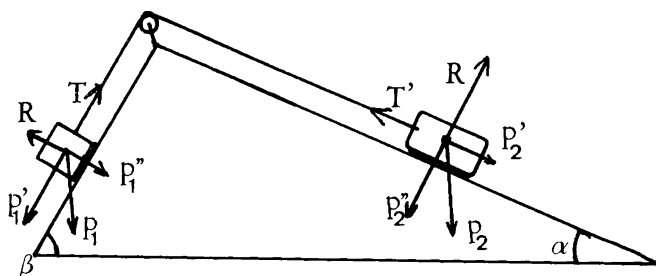
$$\vec{F} = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2$$

Etant donné que : $|R_1| = |P'_1|$, $|R_2| = |P'_2|$

Et que $|\vec{T}| = |\vec{T}'|$

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{P}'_1 + \vec{P}'_2}{M_1 + M_2} = \vec{g} \frac{M_1 \sin \beta - M_2 \sin \alpha}{M_1 + M_2}$$

$$\gamma = 10 \frac{5 \cdot 0,4 \cdot 10^3 - 0,5 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^3} = \underline{\underline{2,5 \text{ m/s}^2}}$$



2) Calcul de T : $T' - P_1' = \gamma M_1$

$$T' = M_1 (\gamma + g \sin \alpha) = 10^3 (2,5 + 5) = \underline{\underline{7500 \text{ N}}}$$

$$P_2' - T = M_2 \gamma$$

$$T = M_2 (-\gamma + g \sin \beta) = 5 \cdot 10^3 (4 - 2,5) = \underline{\underline{7500 \text{ N}}}$$

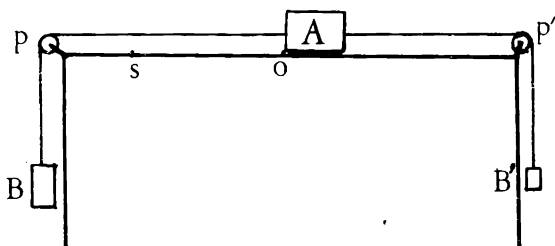
$$|\bar{T}| = |\bar{T}'|$$



Ex. - 19* :

Un corps A de masse $M = 1,66 \text{ Kg}$ peut glisser sur une longue table horizontale. Comme l'indique la figure, il est réuni par des fils fins à deux autres corps, l'un B de masse $m = 0,490 \text{ Kg}$ et l'autre B' de masse $m' = 0,300 \text{ Kg}$. On suppose que les masses des fils et des poulies P et P' sont négligeables, ainsi que les frottements. Le système abandonné à lui-même, prend un mouvement uniformément accéléré.

1) Calculer l'accélération de ce mouvement.



2) Calculer les tensions T et T' des fils AB et AB'.

Calculer directement la différence de ces tensions.

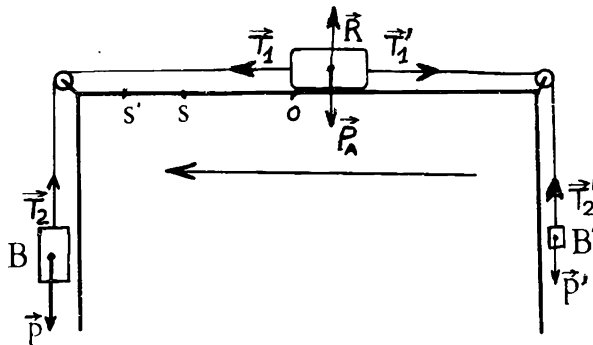
3) Calculer le temps mis par le corps A partant du repos en O, pour atteindre le point S à une distance : $OS = 2,189 \text{ m}$. Calculer aussi la vitesse instantanée du corps A à son passage en S ;

4) Au moment où le corps A passe en S, le fil qui le relie au corps B casse brusquement. Décrire le mouvement ultérieur de l'ensemble des corps A et B'.

Calculer le temps qui s'écoule entre le départ de A du point O et son retour au même point.

5) Calculer de deux manières différentes, la tension T'' du fil AB' après la rupture du fil reliant A et B.

On prendra pour valeur de l'accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.



SOLUTION :

1) Calcul de γ : on a :

$$|T_1'| = |T_2'| \text{ et } |T_1| = |T_2| \text{ (Poulie de masse négligeable)}$$

$$|P_A| = |R| \text{ (réaction de la table)}$$

Dans l'orientation choisie on a :

$$\gamma = \frac{\Sigma F}{\Sigma M} = \frac{P - P'}{M + m + m'} = g \frac{m - m'}{M + m + m'}$$

$$\text{d'où } \gamma = 9,8 \frac{0,49 - 0,3}{1,66 + 0,49 + 0,3} = 0,76 \text{ m/s}^2$$

2) Calcul des tensions des fils :

$$T_2' : m'(g + \gamma) = 0,3 (9,8 + 0,76) \cong 3,17 \text{ N}$$

$$T_2 = m (g - \gamma) = 0,49 (9,8 - 0,76) \cong 4,43 \text{ N}$$

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à M :

$$\begin{aligned} T_2' - T_2 &= T_1 - T_1' = M\gamma \\ &= 1,66 \cdot 0,76 = 4,43 - 3,17 = 1,26 \text{ N} \end{aligned}$$

3) C'est un mouvement uniformément varié donc :

$$\begin{aligned} t^2 &= \frac{2x}{\gamma} = \frac{2 \cdot 2,189}{0,76} & \text{et la vitesse en s :} \\ t &= \underline{\underline{2,4 \text{ s}}} & v_s = \gamma t = 0,76 \cdot 2,4 = 1,82 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

4) Après S, le mouvement a pour équation horaire :

$$x = \frac{1}{2} \gamma' t + v_0 t + x_0 ; \text{ où } x_0 = 2,189 \text{ m et } v_0 = 1,82 \text{ m/s}$$

$$\text{avec } \gamma' = -g \frac{m'}{M+m'} = -9,8 \frac{0,3}{1,66+0,3} = -1,5 \text{ m/s}^2$$

Quand le fil AB se casse, les corps A et B' vont être animés d'un mouvement uniformément retardé avec une vitesse initiale non nulle. Le corps A va continuer jusqu'au point S' (v=0) son mouvement et reviendra en O.

L'équation horaire de A entre S et O est tel que :

$$x = -\frac{1}{2} 1,5 t^2 + 1,82 t + 2,189$$

Pour $x = 0$, la solution positive de cette équation sera le temps mis par le corps pour aller de S vers O en passant par S'. Ainsi :

$$-0,75 t^2 + 1,82 t + 2,189 = 0$$

donne $t = 3,3 \text{ s}$

Le trajet OS a été fait selon : $x = \gamma t^2$

avec $x = 2,189 \text{ m}$ on a :

$$t' = \sqrt{\frac{2,189}{0,7}} = 1,7 \text{ s}$$

Donc, le corps A mettra 5s pour revenir en O.

5) Appliquée au corps A, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$T'' = M\gamma' = 1,66 \cdot 1,5 = 2,49 \text{ N}$$

Au corps B' elle donne :

$$T'' - P' = m'\gamma' , \text{ d'où } T'' = m'(g + \gamma')$$

$$= 0,3 (9,8 - 1,5) = 2,49 \text{ N}$$



Ex. - 20 - :

Considérons le montage ci-après. Autour des 3 poulies de masse négligeable, 4 chariots sont reliés par un fil inextensible et de masse négligeable. Trouver :

1) L'accélération $\vec{\gamma}$ du système.

2) Les tensions $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{T}_3$.

($g = 10 \text{ m/s}^2$)

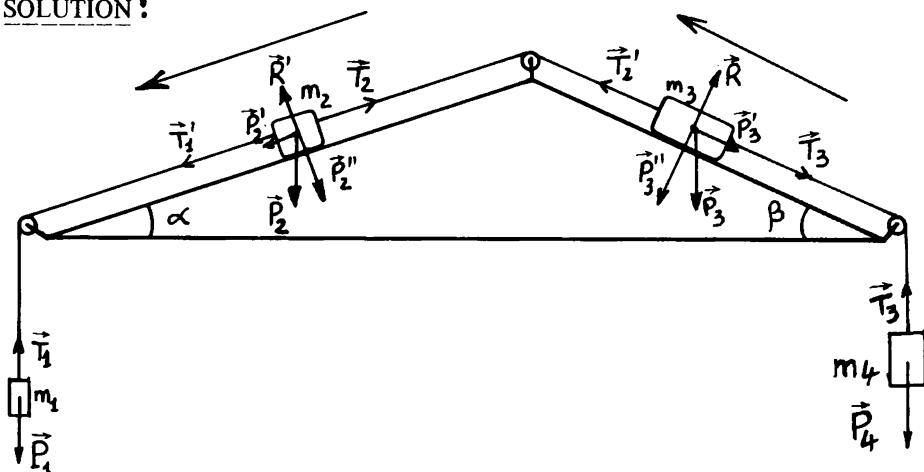
A.N. : $m_1 = m_4 = 200 \text{ g}$

$m_2 = m_3 = 100 \text{ g}$

$\alpha = 60^\circ$

$\beta = 30^\circ$

SOLUTION :



1) On a : $\Sigma \vec{F} = \vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{T}_1' + \vec{P}_2' + \vec{T}_2 + \vec{T}_2' + \vec{P}_3' + \vec{T}_3 + \vec{T}_3' + \vec{P}_4$

Les tensions sont égales deux à deux, donc, dans le sens choisi, on a :

$$\Sigma F = P_1 + P_2' - P_3' - P_4$$

$$\Sigma F = g(m_1 + m_2 \sin \alpha - m_3 \sin \beta - m_4)$$

La somme des masses : $\Sigma M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$

d'où :

$$\gamma = g \frac{m_1 + m_2 \sin \alpha - m_3 \sin \beta - m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$= 10 \cdot \frac{10^{-3} (200 + 100 \sin 60 - 100 \sin 30 - 200)}{10^{-3} (200 + 100 + 100 + 200)} = 0,61 \text{ m/s}^2$$

2) Calcul des tensions :

a) pour m_1 on a : $P_1 - T_1 = m_1 \gamma$

$$\text{d'où } T_1 = P_1 - m_1 \gamma = m_1 (g - \gamma) = \underline{\underline{1,87 \text{ N}}}$$

b) pour m on a : $T'_1 + P'_2 - T_2 = m_2 \gamma$.

$$T_2 = T'_1 + P'_2 - m_2 \gamma = T'_1 + m_2 (g \cdot \sin \alpha - \gamma)$$

$$T_2 = 1,87 + 0,1 (8,66 - 0,6) \cong \underline{\underline{2,67 \text{ N}}}$$

c) Pour m_4 on a : $T_3 - P_4 = m_4 \gamma$

$$\text{d'où } T_3 = m_4 (g + \gamma) = 0,2 \times 10,6 = \underline{\underline{2,12 \text{ N}}}$$

REMARQUE : En guise de vérification, on peut écrire pour m_3 :

$$T'_2 - P'_3 - T_3 = m_3 \gamma \cong \underline{\underline{0,06 \text{ N}}}$$



Ex. 21 - : Avec une fronde, on lance une pierre avec une vitesse initiale v_0 qui fait un angle $\alpha = 45^\circ$ avec l'horizontale et de module 12m/s. Calculer :

1) La portée $x_{\max}$.

2) La flèche $h_{\max}$.

3) Les instants de passage en ces points et les vitesses correspondantes (module et direction).

4) Déterminer le module et la direction de la vitesse en un point d'altitude $h = 2,3 \text{ m}$.

SOLUTION :

1) La portée est donnée par l'expression :

$$x_{\max} = \frac{-v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{-144}{-10} = \underline{\underline{14,4 \text{ m}}}$$

2) La flèche ou hauteur maximale :

$$h_{\max} = \frac{-v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{-144 \cdot 0,5}{-2 \cdot 10} = \underline{\underline{3,6 \text{ m}}}$$

3) a) L'instant qui correspond à $x_{\max}$ peut être calculé à partir de :

$$t_{\max} = \frac{x_{\max}}{V_0 \cos \alpha} = \frac{14,4}{12 \frac{\sqrt{2}}{2}} \cong \underline{\underline{1,69 \text{ s}}}$$

ceci parce que : $x_{\max.} = V_o \cdot \cos \alpha \cdot t_{\max.}$

On sait que la composante verticale s'annule pour :

$$h = h_{\max.}, \text{ donc } V_v = gt_m + V_o \sin \alpha = 0$$

$$t_m = \frac{V_o \sin \alpha}{g} = \frac{12 \cdot \sqrt{2}/2}{10} \cong 0,84 \text{ s}$$

b) calcul des vitesses :

La vitesse en tout point de la trajectoire peut être décomposée en deux composantes, une verticale V_v et une horizontale V_H :

$$V_v = gt + v_o \sin \alpha \quad (g < 0)$$

$$V_H = v_o \cos \alpha$$

— en $h_{\max.}$ on a : $V_v = 0$

$$V_H = V_o \cos \alpha$$

donc :

$$V_{\max.} = V_H = 12 \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} = 8,48 \text{ m/s}$$

Sa direction est celle de V_H , donc horizontale.

$$\text{— en } x_{\max.} : V_v = -10,1,69 + 12 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -6\sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$V_H = 12 \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \text{ m/s}$$

d'où $V = \sqrt{144} = 12 \text{ m/s}$. Elle a une direction de -45° par rapport à l'horizontale.

REMARQUE : Pour avoir le module, de la vitesse, on peut employer l'expression :

$$V^2 - V_o^2 = 2gh$$

$$\text{en } h_{\max.} \text{ on a : } V_{\max.}^2 = 2gh + V_o^2 = -20 \times 3,6 + 144$$

$$v_{\max.} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} = V_o \cos \alpha = 8,48 \text{ m/s}$$

$$\text{en } x_{\max.} \text{ on a : } V^2 = 144 \rightarrow V = 12 \text{ m/s}$$

4) Le module de la vitesse est égale à :

$$V_2^2 = V_0^2 + 2gz = 144 - 44 = 100$$

$$V_2 = \pm 10 \text{ m/s}$$

L'angle α' que fait la vitesse avec l'horizontale est tel que :

$$\cos \alpha' = \frac{V_0 \cos \alpha}{V_2} = \frac{12 \frac{\sqrt{2}}{2}}{10} = 0,6 \cdot \sqrt{2}$$

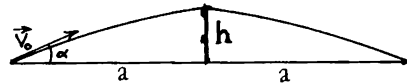
$$\alpha' = 21^\circ 56'$$



Ex. - 22 - :

Un court de tennis a comme longueur $2a$ et le filet comme hauteur h . Une balle dont la trajectoire est située dans un plan vertical perpendiculaire au filet, part d'une ligne de service, en A rase le filet et retombe sur la ligne de service opposé en B. Déterminer en fonction de a et h , l'angle α de tir et la vitesse initiale $\vec{V}_0$

A. N. : $h = 1 \text{ m}$; $a = 20 \text{ m}$



SOLUTION :

Lorsqu'un projectile est lancé dans le champ de la pesanteur avec une vitesse V_0 faisant avec l'horizontale un angle α ; on sait que la portée x_m est égale à :

$$x_m = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

et que la flèche est égale à :

$$h_m = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

En divisant membre à membre ces deux équations, on peut écrire :

$$x_m = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} \cdot \frac{2g}{V_0^2 \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{2a}{h}$$

$$\frac{a}{h} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

d'où : $\frac{2h}{a} = \operatorname{tg} \alpha$

A.N. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{20} = 0,1$

$$\alpha = 5^\circ 42'$$

D'après l'expression de X_m on a : $V_0 = 45 \text{ m/s}$.



Ex. -23 - :

Un cheval saute une tranchée de 5 m de largeur. Quelle doit être sa vitesse s'il se lance à 15° par rapport à l'horizontale. ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

SOLUTION :

Le cheval est assimilé à un point matériel ; lancé dans le champ de la pesanteur avec une vitesse qui fait $\alpha = 15^\circ$ avec l'horizontale, sa portée sera égale à :

$$x = \frac{-V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$\text{d'où } V_0 = \sqrt{\frac{-x \cdot g}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10}{0,5}} \quad (g = -10 \text{ m/s}^2)$$

$$= 10 \text{ m/s} = \underline{\underline{\underline{36 \text{ Km/h}}}}$$

Ex. -24* :



1) Un avion, volant horizontalement à une altitude de 7840m avec une vitesse de 450 km/h, laisse tomber une bombe en passant par la verticale d'un point A du sol.

a) Au bout de combien de temps l'éclatement se produira-t-il au contact du sol ?

b) Quelle distance l'avion aura-t-il parcouru à ce moment-là depuis l'instant où il a lâché la bombe ?

c) A quelle distance du point A se produira l'éclatement ?

2) En admettant que l'avion ne vole plus qu'à une altitude de 1960m, quelle vitesse devrait-il avoir au moment du déclenchement du projectile pour que ce dernier tombe dans un rayon de 200 m du point A ? Cette vitesse est-elle vraisemblable ?

3) La vitesse de l'avion étant de 360 km/h, de quelle altitude devra être lâchée la bombe en vol piqué, faisant avec la verticale un angle de 9° , pour que le projectile tombe dans un rayon du point A inférieur à 156m ? ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$, résistance de l'air négligeable).

SOLUTION :

- 1) a) On sait que suivant l'axe horizontal, la projection du mouvement est un mouvement uniforme, d'expression :

$$x = V_0 t = 125 t \quad (1)$$

et que suivant l'axe vertical, c'est une chute libre :

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

La bombe sera au contact du sol au bout de :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 7840}{10}} = \sqrt{1568} \cong \underline{\underline{40 \text{ s}}}$$

- b) La distance parcourue par l'avion sera d'après (1) :

$$x = 125 t = 125 \cdot 40 = \underline{\underline{5000 \text{ m}}}$$

- c) La bombe comme l'avion, horizontalement, vont parcourir la même distance, c'est-à-dire :

$$x = 125 t = \underline{\underline{5000 \text{ m}}}$$

- 2) Le temps d'éclatement sera :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 1960}{9,8}} = 20 \text{ s}$$

Si $x = 200 \text{ m}$ on aura :

$$V_0 = \frac{x}{t} = \frac{200}{20} = 10 \text{ m/s} = 36 \text{ Km/h, vitesse qui ne peut pas être celle d'un avion, laquelle doit être beaucoup plus grande.}$$

- 3) La vitesse de l'avion est communiquée à la bombe et peut être composée en deux composantes :

$$V_H = V_0 \cdot \sin \alpha \text{ (Horizontale)}$$

$$V_v = V_0 \cdot \cos \alpha \text{ (Verticale)}$$

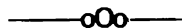
donc :

$$h = \frac{1}{2} g t^2 + V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

$$x = V_0 \sin \alpha t, \text{ avec } V_0 = 360 \text{ Km/h} = 100 \text{ m/s}$$

$$\text{d'où } t = \frac{x}{V_0 \cdot \sin \alpha} = \frac{156}{100 \times 0,156} = 10 \text{ s}$$

$$\text{et } h = 4,9 (10)^2 + (100 \times 0,98 \times 10) = \underline{\underline{1470 \text{ m}}}$$



Ex. -25* :

Un avion veut bombarder une locomotive (en B), roulant sur une voie ferrée, rectiligne, horizontale, à 72 Km/h. L'avion vole parallèlement à la voie, à la vitesse constante de 720 Km/h dans le même sens que la locomotive. Viser le but, revient à déterminer l'angle α que fait la droite AB avec la verticale de A à l'instant où la bombe est larguée. Déterminer α . (résistance de l'air négligeable).

SOLUTION :

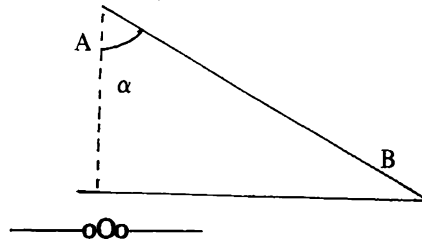
Si l'avion lâche la bombe en volant horizontalement, pour atteindre la locomotive, il doit se déplacer au-dessus d'elle, voler à la même vitesse et larguer la bombe. Comme il ne peut pas voler à 72 Km/h, il pique d'un angle α par rapport à la verticale pour que la résultante horizontale de sa vitesse soit égale à 72 Km/h. C'est-à-dire sa vitesse V_A doit être telle que :

$$V_t = \sin \alpha \cdot V_A$$

(où V_t = vitesse de train)

$$\text{donc } \sin \alpha = \frac{V_t}{V_A} = \frac{1}{10}$$

$$\alpha \cong \underline{\underline{\underline{6^\circ}}}$$



Ex. - 26*:

Dans un puits de mine profond de 500 m se déplace une cage pesant vide 5000 Kg.

1) En négligeant les forces de frottement et la résistance de l'air, en supposant constante l'accélération de la pesanteur en tout point du puits $g = 10 \text{ m/s}^2$, quelle serait la durée de chute de la cage si le câble se rompait au moment où elle est immobile à l'entrée du puits ? Quelle serait sa vitesse v à son arrivée au fond ?

2) Immobile au fond du puits, la cage pleine de charbon pèse 10 tonnes. On veut lui imprimer une vitesse d'ascension de 10 m/s par un mouvement uniformément accéléré durant 20s.

Quelle traction $\bar{T}$ le câble exercera-t-il sur la cage et quel sera le chemin parcouru pour atteindre cette vitesse ?

3) Après avoir subi le mouvement précédent, la cage pleine de charbon est animée d'un mouvement uniforme puis arrive sans vitesse au niveau du sol au terme d'un mouvement uniformément retardé d'accélération opposée à celle du départ. Quelle est la durée du parcours ?

SOLUTION :

1) En chute libre, la cage aura une équation horaire :

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \text{ d'où } t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500}{10}} = \underline{\underline{10 \text{ s}}}$$

$$v^2 = 2gh = 2 \cdot 10 \cdot 500 = 10^4$$

$$v = 100 \text{ m/s}$$

2) L'accélération nécessaire pour une vitesse de 10 m/s est égale à :

$$\gamma = \frac{v}{t} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ m/s}^2$$

La tension du câble sera :

$$T = M (g + \gamma) = 10^4 (10 + 0,5) = 10,5 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Le chemin h_1 parcouru pour atteindre cette vitesse :

$$h_1 = \frac{v^2}{2\gamma} = \frac{100}{2 \cdot 0,5} = \underline{\underline{100 \text{ m}}}$$

3) Pendant la phase de freinage, le mouvement est uniformément retardé avec $\gamma' = -0,5 \text{ m/s}^2$ et une vitesse initiale égale, à celle de la fin de son mouvement accéléré du départ :

$$v = \gamma' t + v_0 = \gamma' t + \gamma t_1 \text{ (où } t_1 = \text{durée de la phase du départ).}$$

Cette phase durera pendant, t_3 , tel que :

$$0 = \gamma' t_3 + \gamma t_1$$

$$t_1 = t_3 = 20 \text{ s}$$

Le chemin parcouru pendant le freinage est :

$$h_3 = \frac{-v_0^2}{2\gamma'} = \frac{-100}{-2 \cdot 0,5} = 100 \text{ m}$$

La distance parcourue en mouvement uniforme, est égale à :

$$h_2 = 500 - 200 = 300 \text{ m}$$

sa durée sera :

$$t_2 = \frac{300}{10} = \underline{\underline{30 \text{ s}}}$$

La durée totale du parcours est :

$$t_1 + t_2 + t_3 = 20 + 30 + 20 = \underline{\underline{70 \text{ s}}}$$



Ex. - 27* :

Une cage d'ascenseur pesant 5000 Kg dessert un puits de mine de 900 m de profondeur. Pendant le mouvement, les résistances de frottement sont équivalentes à une force de 500 Kgf parallèle au mouvement et indépendante de la vitesse.

1) La cage étant au fond du puits, on exerce une force de traction de 6000 Kgf vers le haut. Au bout de 150 m de parcours, l'effort de traction est modifié de sorte que le mouvement devienne uniforme pendant 600 m. L'effort de traction est ensuite modifié de sorte que la cage arrive au sommet du puits avec une vitesse nulle, d'un mouvement uniformément retardé. Etudier les diverses phases du mouvement et déterminer la durée totale de la montée (on prendra $g = 10 \text{ u.SI}$). Représenter en fonction du temps :

- a) l'espace parcouru,
- b) la vitesse de la cage.

2) Calculer pendant les deuxième et troisième phases du mouvement, la force de traction.

3) Un corps de 20 kg est suspendu à un dynamomètre placé dans la cage. Quelles seront les indications de ce dynamomètre pendant les trois phases du mouvement ?

SOLUTION :

1) La cage a trois phases de mouvement :

- a) phase de démarrage pendant t_1 sur une distance h_1
- b) phase de mouvement uniforme pendant t_2 sur une distance h_2
- c) phase de mouvement de freinage pendant t_3 sur une distance h_3

a) Pendant le démarrage, elle a une accélération γ telle que algébrique-
ment :

$$T - P - F_R = M\gamma$$

où T = effort de traction

P = poids

F_R = Force de frottement.

$$\text{d'où } \gamma = \frac{T - P - F_R}{M} = \frac{6 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^3}{5000} = 1 \text{ m/s}^2$$

L'équation du mouvement pendant cette phase sera :

$$h_1 = \frac{1}{2} \gamma t^2$$

Sa durée sera :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{\gamma}} = \sqrt{300} = \underline{\underline{17,32 \text{ s}}}$$

La vitesse à la fin de cette phase sera :

$$V = \gamma t_1 = \underline{\underline{17,3 \text{ m/s}}}$$

b) La deuxième phase, avec un mouvement uniforme, aura pour durée :

$$t_2 = \frac{h_2}{v} = \frac{600}{17,3} = \underline{\underline{34,7 \text{ s}}}$$

c) La phase de freinage se fera sur une distance de :

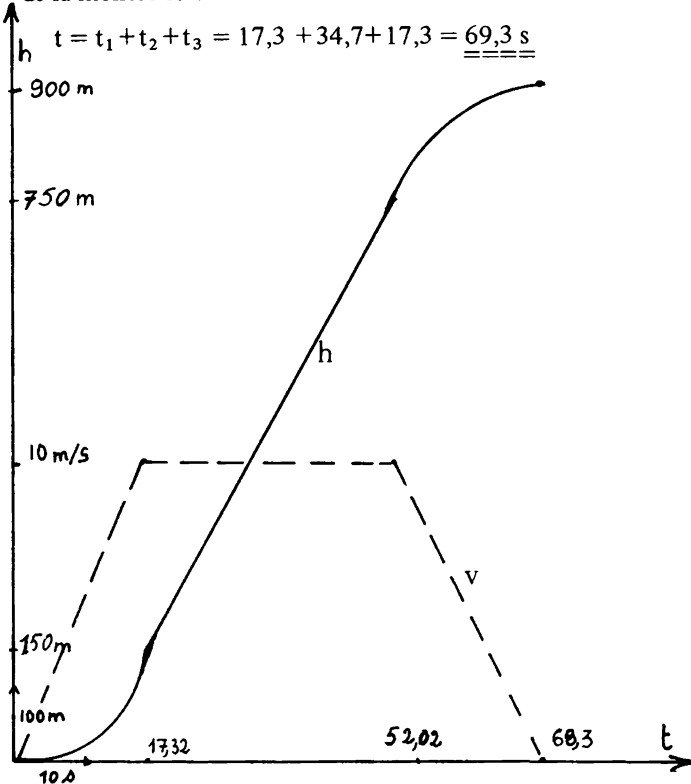
$$h_3 = 900 - (600 + 150) = 150 \text{ m}$$

avec une accélération de :

$$\gamma' = \frac{V^2}{2h_3} = -1 \text{ m/s}^2$$

Donc la durée t_3 sera égale à t_1 (voir exercice N° 26) et la durée totale de la montée sera :

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 17,3 + 34,7 + 17,3 = \underline{\underline{69,3 \text{ s}}}$$



Sur le graphe ci-joint, on représente en même temps la variation de l'abscisse et de la vitesse pendant les trois phases.

3) La force de traction pendant la deuxième phase sera ($\gamma=0$) :

$$T_2 = P + F_R = 5.10^4 + 5.10^3 = \underline{\underline{55.10^3 \text{ N}}}$$

Pendant la troisième phase :

$$T_3 = P + F_R + M\gamma' = 5.10^4 + 5.10^3 - 5.10^3 = \underline{\underline{5.10^4 \text{ N}}}$$

3) Les indications du dynamomètre en général s'écrivent :

$$\text{vectoriellement : } \vec{F} + \vec{P} = -M\vec{\gamma}$$

$$\text{Algébriquement : } F = -m(g - \gamma)$$

Si on oriente positivement vers le haut (montée), on aura :

$$\text{a) } F_1 = -20(-10-1) = 220 \text{ N}$$

$$\text{b) } F_2 = -20(-10) = 200 \text{ N}$$

$$\text{c) } F_3 = -20(-10+1) = 180 \text{ N}$$



Ex. - 28* :

Le bâti d'un appareil analogue à la machine d'Atwood, porte une règle verticale et une poulie à axe horizontal placé un peu au-dessus du sommet de la règle verticale. Sur la gorge de la poulie passe un fil de masse négligeable dont les extrémités peuvent être chargées par 8 masses marquées de 100 g chacune.

1) Dans une première expérience, les deux extrémités du fil sont chargées l'une de 500g, l'autre de 300 g et le système est abandonné à lui-même sans vitesse initiale. Calculer l'accélération du système, la hauteur parcourue et la vitesse acquise au bout de 1,2 seconde.

2) On fixe au bâti un plan incliné faisant un angle de 30° par rapport au plan horizontal, vers le bas, à partir de la poulie. La masse de 300g soutenue par le fil peut glisser sur le plan sans frottement, le brin qui la supporte restant parallèle au plan, donc incliné de 30° vers le bas. Que deviennent les valeurs de l'accélération des deux masses, du déplacement et de la vitesse 1,2s après que les système ait été abandonné sans vitesse initiale ?

3) On dispose alors le plan horizontalement de façon que le brin de fil tendu qui le longe soit lui aussi horizontal. Comment faudrait-il répartir la charge totale de 800g entre les deux extrémités du fil, celle qui pend librement et celle qui glisse sur le plan, pour que l'accélération ne change pas ?

4) Calculer la tension du fil dans chacune de ces trois expériences, en négligeant la masse de la poulie. L'accélération g de la pesanteur vaut $9,8 \text{ m/s}^2$.

SOLUTION :

1) L'accélération du système est telle que (si on choisit le sens positif du mouvement comme la figure ci-après) :

$$P_1 - P_2 = g(m_1 - m_2) = (m_1 + m_2)\gamma$$

$$\gamma = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 9,8 \cdot \frac{0,2}{0,8} = \underline{\underline{2,45 \text{ m/s}^2}}$$

La hauteur parcourue sera :

$$h = \frac{1}{2} \gamma t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,45 \cdot (1,2)^2$$

$$= \underline{\underline{1,764 \text{ m}}}$$

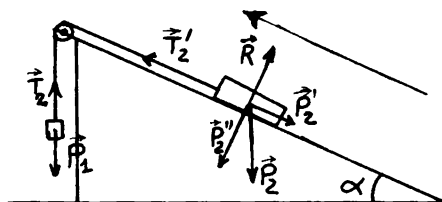
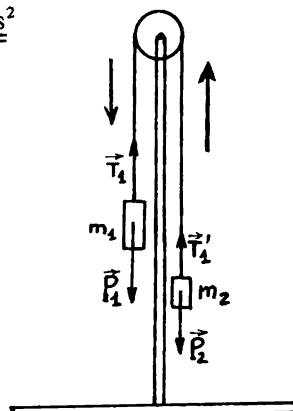
La vitesse acquise au bout de 1,2 sera :

$$v = \gamma \cdot t = 2,45 \cdot 1,2 = \underline{\underline{2,94 \text{ s}}}$$

2) L'accélération γ' s'écrit ; après avoir décomposé P_2 en P'_2 , équilibrée par R , la réaction du plan incliné et en $P'_2 = P_2 \sin \alpha$:

$$\gamma' = g \frac{(m_1 - m_2 \sin \alpha)}{m_1 + m_2}$$

$$= 9,8 \frac{(0,5 - (0,3 \times 0,5))}{0,8} = \underline{\underline{4,29 \text{ m/s}^2}}$$



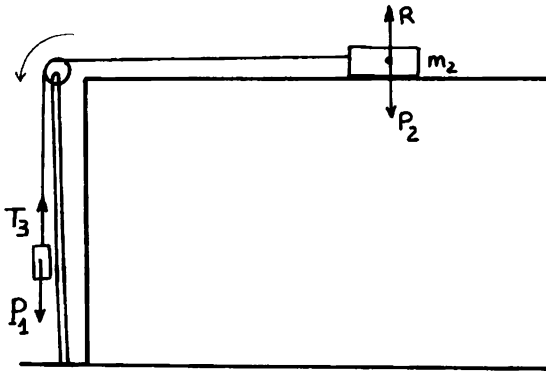
Le déplacement sera égal à :

$$h' = \frac{1}{2} \gamma' t^2 = \frac{1}{2} \cdot 4,29 \cdot (1,2)^2 = \underline{\underline{3,09\text{m}}}$$

La vitesse des masses sera :

$$v' = \gamma t = 4,29 \cdot 1,2 = \underline{\underline{5,15\text{m/s}}}$$

3) On a dans ce cas :



$$\gamma = g \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

avec : $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

$$\gamma = 2,45 \text{ m/s}^2$$

$$m_1 + m_2 = 0,8 \text{ Kg}$$

$$\text{On tire : } m_1 = \frac{\gamma (m_1 + m_2)}{g}$$

$$= \frac{2,45 \times 0,8}{9,8} = 0,2 \text{ Kg}$$

$$\text{et } m_2 = 0,6 \text{ Kg}$$

Donc pour m_1 on prendra 2 masses marquées de 100g et 6 masses formeront m_2 .

4) Appliquée à la masse m_1 , la relation fondamentale de la dynamique nous donne :

$$P - T = m_1 \gamma$$

$$\text{d'où } T = m_1 (g - \gamma)$$

Ainsi :

$$T_1 = 0,5 (9,8 - 2,45) = 3,67 \text{ N}$$

$$T_2 = 0,5 (9,8 - 4,29) = 2,75 \text{ N}$$

$$T_3 = 0,2 (9,8 - 2,45) = 1,47 \text{ N}$$



Ex. - 29* :

La masse d'un camion est 2 tonnes. Les forces de frottement, parallèles au déplacement sont de 15 Kgf.

1) Calculer la puissance du moteur nécessaire pour maintenir une vitesse de 72 Km/h sur une route horizontale. Donner le résultat en chevaux-vapeur.

2) Le camion monte une côte de 3%. Calculer la puissance du moteur nécessaire pour maintenir la vitesse de 72 km/h.

3) Le camion montant ainsi la côte de 3% à la vitesse de 72 km/h, on débraye (c'est-à-dire que le moteur n'entraîne plus le véhicule). Quelle distance parcourra le camion avant de s'arrêter ? Quelle force de freinage faut-il alors exercer pour empêcher le camion de redescendre ?

4) Le camion reparti et sa vitesse étant de nouveau 72 Km/h, il aborde un virage horizontal de 500 m de rayon. Quel angle doit faire la route avec le plan horizontal pour éviter tout risque de dérapage ?

On prendra $g = 10 \text{ m/s}^2$

SOLUTION :

1) La puissance P est égale à :

où W : Travail en Joule.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fd}{t} = F.v$$

F : Force du moteur en Newton.

d : Distance parcourue en mètre.

v : Vitesse en m/s.

Sur une route horizontale et pour un mouvement uniforme, la force du moteur doit équilibrer seulement celle de frottement t . Donc :

$$P = 150 \cdot 20 = 3000 \text{ W} = 3 \text{ KW} \cong 4 \text{ ch.}$$

2) La force du moteur doit équilibrer les forces de frottements et la résultante tangentielle du poids $P' = P \sin \alpha$

$$F_2 = 150 + (2 \cdot 10^4 \cdot 0,03) = 750 \text{ N}$$

$$\text{d'où } P_2 = 750 \times 20 = 15000 \text{ W} = 15 \text{ KW} = \underline{\underline{20,40 \text{ ch.}}}$$

3) Si on débraye, le camion va être animé d'un mouvement uniformément retardé avec une décélération γ et on a :

$$-F_R - mg \sin \alpha = m\gamma$$

$$\gamma = -g \sin \alpha - \frac{F_R}{m} = -0,375 \text{ m/s}^2$$

d'où la distance d parcourue avant l'arrêt :

$$d = \frac{-V^2}{2\gamma} = \frac{-400}{2 \cdot (-0,375)} = 533,3 \text{ m}$$

La nature des forces de frottements n'étant pas définie, on peut considérer deux cas :

- a) Les forces de frottements sont dues à la résistance de l'air auquel cas, elles sont nulles pendant l'arrêt et la force du frein devra équilibrer seulement la composante $P \cdot \sin \alpha$ du poids :

$$F'_R = P \sin \alpha = 2 \cdot 10^4 \cdot 0,03 = \underline{\underline{600 \text{ N}}}$$

- b) Si les forces de frottements sont dues au mauvais état des roulements des roues par exemple, le frein sera donc aidé par les forces de frottement et on aura :

$$F'_R = P \sin \alpha - F_R = \underline{\underline{450 \text{ N}}}$$

- 4) L'angle α que doit faire la route avec le plan horizontal est tel que :

$$\text{tg} \alpha = \frac{-V^2}{r \cdot g} = \frac{400}{500 \cdot 10} = \frac{4}{50}$$

$$\alpha = \underline{\underline{4^\circ 34'}}$$

Ex. - 30* :



Un cycliste pèse avec sa machine 100 Kg. Les divers frottements ont le même effet qu'une force $\vec{R}_0$ de même direction que le mouvement, de sens opposé à celui-ci et d'intensité 10N, quelle que soit la vitesse.

- 1) a) Le cycliste roule a avec une vitesse constante de 18 Km/h. Quelle est la force de traction qu'il exerce ? Quelle puissance développe-t-il ?

- b) Un obstacle l'oblige à cesser de pédaler et à freiner, les freins développent une nouvelle force $\vec{R}_1$ de sens contraire au mouvement, d'intensité 100 N. Quelle distance parcourt-il avant de s'arrêter ?

c) Cessant de freiner, il repart, exerçant une force de traction de 60 N. Combien de temps met-il pour atteindre à nouveau la vitesse de 18 Km/h ?

2) a) Avant cette même vitesse de 18 Km/h, il aborde une côte à 5,5 % (5,5mde dénivellement pour 100 m de route). Quelle est la force totale $\vec{R}_2$ qui s'oppose à son mouvement ? Quelle distance parcourt-il avant de s'arrêter s'il cesse de pédaler à l'instant où il aborde la côte ?

b) Etant reparti sur cette même pente, il monte à la vitesse constante de 9 Km/h. Quelle puissance développe-t-il ?

c) S'il redescendait cette même route, sans pédaler ni freiner, quelle serait la force totale $\vec{R}_3$ qui l'entraînerait ? Quelle serait en kilomètre/heure, sa vitesse après 500 m de route ?

SOLUTION :

1) a) - La force $\vec{F}$ qu'il exerce doit équilibrer les forces de frottement :

$$F_1 = -R_0 = + \underline{\underline{10 \text{ N}}}$$

$$\text{La puissance développée : } P = F \cdot v = 10,5 = \underline{\underline{50 \text{ W}}} \\ = \underline{\underline{0,07 \text{ ch.}}}$$

b) - Quand il freine, son mouvement aura une décélération γ_1 telle que :

$$R_0 + R_1 = M\gamma_1$$

$$\gamma_1 = \frac{-110}{100} = -1,1 \text{ m/s}^2$$

Il s'arrêtera après avoir parcouru une distance d, telle que :

$$-v_0^2 = 2 \cdot \gamma_1 \cdot d$$

$$d = \frac{-v_0^2}{2\gamma_1} = \frac{-25}{-2,2} = 11,36 \text{ m}$$

c) - La nouvelle accélération γ_2 sera telle que :

$$60 - R_0 = M\gamma_2$$

$$\gamma_2 = \frac{50}{100} = 0,5 \text{ m/s}^2$$

Il atteindra sa vitesse de 18 Km/h au bout de :

$$t_1 = \frac{v}{\gamma_2} = \frac{5}{0,5} = \underline{\underline{10 \text{ s}}}$$

2) a) - En plus de la force de frottement $\vec{R}_0$, la composante tangentielle du poids ($P \sin \alpha$) s'opposera au mouvement du cycliste :

$$R_2 = R_0 + P \sin \alpha = 10 + (1000 \cdot \frac{5,5}{100}) = -65 \text{ N}$$

$$\text{d'où une décélération } \gamma_3 = \frac{-65}{100} = -0,65 \text{ m/s}^2$$

S'il cesse de pédaler il parcourra une distance d_2 , avant de s'arrêter.

$$d_2 = \frac{-V_0^2}{2\gamma_3} = \frac{-25}{-2 \cdot 0,65} = 19,23 \text{ m}$$

b) P_2 la puissance développée est :

$$P_2 = R_2 \cdot v_2 \text{ où } v_2 = 9 \text{ Km/h} = 2,5 \text{ m/s}$$

$$P_2 = 65 \cdot 2,5 = 162,5 \text{ W} = 0,22 \text{ ch.}$$

c) La force $\vec{R}_3$ qui l'entraînera sera :

$$R_3 = P \sin \alpha - R_0 = 45 \text{ N}$$

$$\text{d'où une accélération } \gamma_4 = \frac{45}{100} = 0,45 \text{ m/s}^2$$

sa vitesse v_3 sera au bout de 500 m :

$$v_3^2 = 2 \cdot \gamma_4 \cdot 500 = 450$$

$$v_3 = 21,21 \text{ m/s} = 76,4 \text{ Km/h}$$



Chapitre cinquième

LE MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

FORMULAIRE

A) CINEMATIQUE

$$\alpha = \omega t + \theta$$

$$\omega = \frac{V}{R}$$

$$\gamma_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R$$

ω = vitesse angulaire (rad/s)

V = vitesse tangentielle (m/s)

R = Rayon (m)

α = Angle instantané (rad)

θ = Angle initial

γ_n = Accélération centripète

B) DYNAMIQUE

$$F = \frac{mV^2}{R} = m\omega^2 R$$

$$\text{Pendule conique : } \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 \ell}$$

$$\text{Inclinaison du virage : } \tan \alpha = \frac{V^2}{R \cdot g}$$

Satellite artificiel:

$$\text{Sa vitesse est : } V = R \sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$$

R : Rayon de la terre

h : L'altitude

$$\text{Sa période est : } T = \frac{2\pi(R+h)\sqrt{R+h}}{R \cdot \sqrt{g_0}}$$

g_0 : L'accélération de la pesanteur au sol.



Ex. - 1 - :

Deux mobiles animés d'un mouvement circulaire tel que la vitesse de l'un est le double de la vitesse de l'autre. Partant ensemble d'un même point, trouver les expressions des instants et des abscisses angulaires de leurs rencontres successives (A.N. : $\omega = \frac{\pi}{2}$ rad/s).

SOLUTION :

$$\alpha_1 = \omega t$$

$$\alpha_2 = 2\omega t$$

$$\text{d'où : } 2\omega t = \omega t + 2K\pi$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega} K \text{ avec } K = 0, 1, 2, \dots$$

$$\alpha_1 = 2\pi K \quad \alpha_2 = 4\pi K$$

A.N. :

$$K = 1 ; t_1 = 4s ; \alpha_1 = 2\pi \text{ (1 tour)} ; \quad \alpha_2 = 4\pi \text{ (2 tours)}$$

$$K = 2 ; t_2 = 8s ; \alpha_1 = 4\pi \text{ (2 tours)} ; \quad \alpha_2 = 8\pi \text{ (4 tours)}$$

**Ex. - 2 - :**

A partir de leur équation horaire, trouver le temps qui sépare deux rencontres consécutives des aiguilles d'une montre.

SOLUTION :

Les équations horaires s'écrivent :

– La grande aiguille : $\alpha_G = \omega_G t$

$$\text{avec } \omega_G = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3600}$$

– La petite aiguille : $\alpha_p = \omega_p t$

$$\text{avec } \omega_p = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{12 \cdot 3600}$$

La rencontre aura lieu quand :

$$\alpha_G = \alpha_p$$

$$\frac{2\pi}{3600} t = \frac{2\pi t}{12 \cdot 3600} + 2K\pi \quad (K = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Pour $K = 1$, on a :

$$\frac{2\pi t}{3600} = \frac{2\pi t}{12 \cdot 3600} + 2\pi$$

$$t_1 = \frac{12 \cdot 3600}{11}$$

Pour $K = 2$, on a :

$$\frac{2\pi t}{3600} = \frac{2\pi t}{12 \cdot 3600} + 2 \cdot 2\pi$$

$$t_2 = \frac{2 \cdot 12 \cdot 3600}{11}$$

$$t = t_2 - t_1 = \frac{12 \cdot 3600}{11} \text{ s.} = \frac{720}{11} \text{ minutes} = \frac{12}{11} \text{ heures.}$$



Ex. - 3 - :

Le pignon denté de la roue d'un vélo a un rayon $r = 2 \text{ cm}$. Le rayon R_0 de la roue motrice est égal à 40 cm , celui du plateau de la pédale est $R = 10 \text{ cm}$.

Calculer la vitesse du cycliste s'il fait 25 tours de pédale à la minute.

SOLUTION :

La vitesse du vélo est :

$V = \omega_0 R_0$ où ω_0 est la vitesse angulaire commune à la roue et à son pignon denté.

Mais, $\omega_0 = \frac{v}{r}$ où v est la vitesse linéaire de la chaîne de transmission qui, à son tour est égale à :

$v = \omega R$ où ω et R sont la vitesse angulaire et le rayon du plateau de la pédale. D'où enfin :

$$V = \frac{R_0 v}{r} = \frac{R_0 \omega R}{r} = \frac{40 \cdot 10^{-2} \cdot 2\pi \cdot 25 \cdot 10 \cdot 10^{-2} \cdot 60}{2 \cdot 10^{-2}} = 18,8 \text{ Km/h}$$



Ex. - 4 - :

Quel est le rapport entre le poids et la force centrifuge appliquée à un corps se trouvant à 20 cm de l'axe de rotation, si l'ensemble tourne à raison de 6000 tours par minute ?

SOLUTION :

$$K = \frac{F_c}{p} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

$$\text{avec : } \omega = 2\pi N = 2\pi \frac{6000}{60} = 200\pi$$

$$K = \frac{(200\pi)^2 \cdot 0,2}{10} = 7895$$



Ex. - 5 - :

Quelle doit être la vitesse de rotation de la terre pour qu'il y ait un état d'apesanteur sur la ligne de l'équateur ? Comparer avec la vitesse réelle de rotation (rayon de la terre 6400 Km, $g = 10 \text{ m/s}^2$).

SOLUTION :

La force centrifuge appliquée à un corps de masse m équilibrera, en cas d'apesanteur, le poids ; ainsi on aura :

$$mg = m\omega^2 R$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{10}{64 \cdot 10^5}} = 0,125 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s}$$

La vitesse réelle de rotation de la terre est égale à :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 0,007 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s}$$

Cela veut dire que la terre devrait tourner, $\frac{125}{7} = 18$ fois plus vite. (En 24 heures, le soleil se lèverait 18 fois).



Ex. - 6 - :

Quelle est la vitesse maximale d'un motocycliste qui, sur une piste inclinée à 30° , attaque un virage de rayon de 50m, sans déraper ? ($g=10\text{m/s}^2$).

SOLUTION :

$$V = \sqrt{rg \cdot \tan \alpha} = 16,99\text{m/s} = 61,1 \text{ Km/h}$$



Ex. - 7 - :

Un cycliste pesant avec sa machine 90 Kgf, tourne en rond sur une piste qui a la forme d'un entonnoir. Le diamètre de la circonférence parcourue par le cycliste est de 10 m. La vitesse est de 40 Km/h. Déterminer :

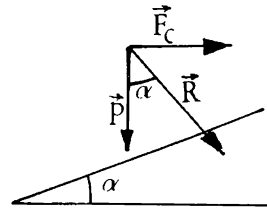
1) L'inclinaison de la piste.

2) La force que supporte la piste de la part du cycliste avec sa machine.

SOLUTION :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_c}{p} = \frac{m V^2}{R \cdot g \cdot m} = \frac{(11,11)^2}{10 \cdot 10} = 1,23$$

$$\alpha = 51^\circ$$



$$\frac{P}{R} = \cos \alpha \rightarrow R = \frac{P}{\cos \alpha} = 142,98 \text{ Kgf} = \underline{\underline{1429.8 \text{ N}}}$$



Ex. - 8 - :

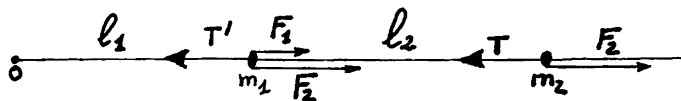
A l'axe vertical d'un moteur Y'Y est fixé rigidement une tige horizontale OX. Sur OX est enfilée une masse m qui peut glisser sans frottement le long de OX. Cette masse est reliée à O par un fil non extensible de masse négligeable.

- 1) Calculer la tension T du fil ℓ_1 si le tout tourne avec une vitesse angulaire ω .
- 2) On relie m_1 à une autre masse m_2 par un fil ℓ_2 identique au premier. Calculer les tensions T et T' des fils.

A. N. : $\ell_1 = \ell_2 = 20 \text{ cm}$; $m_1 = m_2 = 100 \text{ g}$; $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

SOLUTION :

$$1) T = m_1 \omega^2 \ell_1 = \underline{\underline{2 \text{ N}}}$$



- 2) Sur ℓ_1 sont appliquées les deux forces F_1 et F_2 dues à la rotation de m_1 et m_2

d'où :

$$T' = m_1 \omega^2 \ell_1 + m_1 \omega^2 (\ell_1 + \ell_2)$$

Sur ℓ_2 :

$$T = m_2 \omega^2 (\ell_1 + \ell_2)$$

Si $\ell_1 = \ell_2 = 0,2 \text{ m}$

$$m_1 = m_2 = 0,1 \text{ Kg et } \omega = 10 \text{ rad/s}$$

$$T' = 0,1 \cdot 100 \cdot 0,6 = \underline{\underline{6 \text{ N}}}$$

$$T = \underline{\underline{4 \text{ N}}}$$

Ainsi la tension qui s'exerce sur le fil intérieur est 1,5 plus grande que celle appliquée sur le fil extérieur.

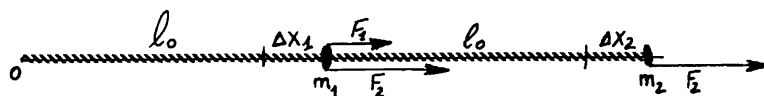


Ex. - 9 - :

Reprenre l'exercice précédent en remplaçant les deux fils par deux ressorts identiques de constante de raideur $K=10^2 \text{ N/m}$ et de longueur $\ell_0 = 14,2 \text{ cm}$.

Calculer les longueurs des deux ressorts si $\omega = 10 \text{ rad/s}$ et $m_1=m_2=100\text{g}$.

SOLUTION :



Au premier ressort s'appliquent les 2 forces centrifuges dues à m_1 et m_2 , il s'allongera de Δx_1 sous l'effet de $(F_1 + F_2)$. Le deuxième est allongé de Δx_2 par F_2 . Donc :

$$K \cdot \Delta x_1 = F_1 + F_2$$

$$K \cdot \Delta x_2 = F_2$$

$$\text{Mais : } F_1 = m_1 \omega^2 (\ell_0 + \Delta x_1)$$

$$F_2 = m_2 \omega^2 (2\ell_0 + \Delta x_1 + \Delta x_2)$$

Si $m_1 = m_2 = m$, on a :

$$K \cdot \Delta x_1 = m \omega^2 (3\ell_0 + 2\Delta x_1 + \Delta x_2)$$

$$K \cdot \Delta x_2 = m \omega^2 (2\ell_0 + \Delta x_1 + \Delta x_2)$$

A.N. :

$$100 \Delta x_1 = 426 + 20 \Delta x_1 + 10 \Delta x_2 \quad (1)$$

$$100 \Delta x_2 = 284 + 10 \Delta x_1 + 10 \Delta x_2 \quad (2)$$

La première équation nous permet d'écrire:

$$\Delta x_2 = \frac{80 \Delta x_1 - 426}{10}, \text{ valeur qui portée dans la deuxième équation,}$$

nous donne :

$$\Delta x_1 = \frac{4118}{710} = 5,8 \text{ cm}$$

et donc :

$$\Delta x_2 = 3,8 \text{ cm}$$

Ainsi la longueur du premier ressort sera :

$$14,2 + 5,8 = \underline{\underline{20 \text{ cm}}}$$

et celle du deuxième :

$$14,2 + 3,8 = \underline{\underline{18 \text{ cm}}}$$



Ex. - 10 - :

A l'axe d'un moteur tenu verticalement, on attache un fil inélastique de longueur $\ell_0 = 20 \text{ cm}$ avec une masse ponctuelle $m = 100 \text{ g}$. Quand le moteur se met à tourner la masse m s'éloigne de l'axe de $10\sqrt{3} \text{ cm}$.

1) Calculer la fréquence de rotation du moteur.

2) Quelle est la tension du fil.

SOLUTION :

1) On sait que la vitesse angulaire est égale à :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell_0 \cos \alpha}}$$

α est tel que :

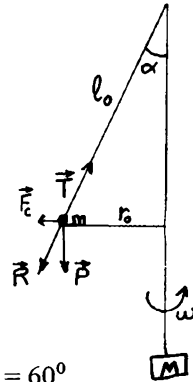
$$\sin \alpha = \frac{r_0}{\ell_0} = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ c'est-à-dire } \alpha = 60^\circ$$

donc :

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{20 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5}} = 10 \text{ rad/s}$$

d'où la fréquence de rotation du moteur :

$$N = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi} \text{ tours/s}$$



2) La tension du fil équilibre la résultante $\vec{R}$ du poids $\vec{P}$ de la masse et de la force centrifuge appliquée à m , donc son module est tel que :

$$|\vec{T}| = |\vec{R}| = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{mg}{\cos \alpha} = \frac{0,1 \cdot 10}{0,5} = \underline{\underline{2 \text{ N}}}$$



Ex. - 11 - :

Reprenre l'exercice précédent en remplaçant le fil par un ressort dont la longueur au repos est $\ell_0 = 10\text{cm}$ et qui s'allonge de 1 mm par 100 gf ; si $\alpha = 60^\circ$ et $m = 100\text{g}$.

- 1) Trouver $\Delta\ell$, l'allongement du ressort ($g = 10\text{m/s}^2$).
- 2) Trouver la fréquence de rotation.

SOLUTION :

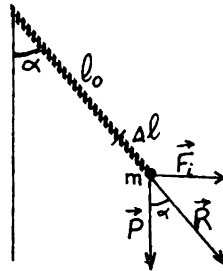
- 1) La résultante de $\vec{P}$ et $\vec{F}_i$, $\vec{R}$ est égale à : $R = K \cdot \Delta\ell$
et aussi :

$$R = \frac{P}{\cos\alpha}$$

D'où on tire :

$$\Delta\ell = \frac{P}{K \cdot \cos\alpha}, \text{ avec } K = 10^3 \text{ N/m}$$

$$\Delta\ell = \frac{1}{10^3 \cdot 0,5} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \underline{\underline{2\text{mm}}}$$



- 2) La vitesse de rotation est égale à :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{(\ell + \Delta\ell)\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{10}{10,2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5}} = 14 \text{ rad/s}$$

$$\text{La fréquence sera : } N = \frac{\omega}{2\pi} = \underline{\underline{2,2 \text{ Hertz}}}$$

Ex. - 12* :



1) Un cycliste roule à la vitesse v sur une route. Il aborde un virage horizontal de rayon r . Exprimer la force centripète à laquelle il est soumis. On assimilera l'ensemble cycliste et machine à un point matériel de masse M situé au centre de gravité G .

2) M vaut 100 Kg et $r = 10 \text{ m}$ est le rayon moyen de la route, qui a pour largeur $l = 5 \text{ m}$. A quelle vitesse maximale le cycliste peut-il prendre son virage sans déraper si les frottements entre le sol et les roues peuvent exercer une force tangente au sol, d'intensité $\phi = 200 \text{ N}$? Que deviendrait cette vitesse maximale si la pluie rendait le sol plus glissant ?

3) On peut relever le virage pour qu'un cycliste roulant au milieu de la route à 11,4 Km à l'heure, ne risque pas de déraper même si le sol est parfaitement glissant. Si la force de frottement due au sol rugueux a la même valeur qu'à la deuxième question, entre quelle limite de vitesse

le cycliste peut-il prendre son virage sur cette route sans risquer de déra-
per ? Sur quelles parties de la route ces vitesses sont-elles possibles ?
On prendra $g = 10 \text{ u.SI}$. On désignera la pente du virage (dévers) par
 $\text{tg}\alpha$ et l'on confondra $\text{tg}\alpha$ et $\sin\alpha$; $\cos\alpha$ et 1.

SOLUTION :

① La force centripète à laquelle est soumis le cycliste avec sa machine :

$$F = M \frac{V^2}{r}$$

② S'il veut prendre un virage sans déra- per, il faut que la force centrifuge
 $F'_c = -M \frac{V^2}{r}$ équilibre la force ϕ de frottement. Donc : $\phi = \frac{MV^2}{r}$

$$v^2 = \frac{\phi \cdot r}{M} \rightarrow v = \sqrt{\frac{\phi \cdot r}{M}}$$

Il roulera à sa vitesse maximale quand r est au maximum c'est-à-dire
 $r = 10 + 2,5$ (complètement à "l'extérieur").

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{200 \cdot 12,5}{100}} = 5 \text{ m/s} = \underline{\underline{18 \text{ Km/h}}}$$

D'après :

$v_{\max} = \sqrt{\frac{r}{M}} \sqrt{\phi}$, on voit que si ϕ décroît, par exemple à cause
de la pluie qui rendrait le sol plus glissant, $v_{\max}$ décroît comme $\sqrt{\phi}$.

③ La force centripète qui lui permet de prendre son virage à la vitesse
 $V_0 = 11,4 \text{ Km/h} = 3,16 \text{ m/s}$, même si le sol est parfaitement glissant
grâce au relèvement $\text{tg}\alpha$ de la route est égale à :

$$F_0 = \frac{MV_0^2}{r_0} = P \cdot \text{tg}\alpha$$

D'autre part, la force ϕ de frottement se décompose en deux : ϕ' qui est
parallèle à F_0 et ϕ'' perpendiculaire au sol et équilibrée par lui :

$$\phi' = \frac{\phi}{\cos\alpha}, \text{ avec } \text{tg}\alpha = \frac{V_0^2}{r \cdot g} = 0,1 ; \text{tg}\alpha \text{ étant petit, on peut écrire :}$$

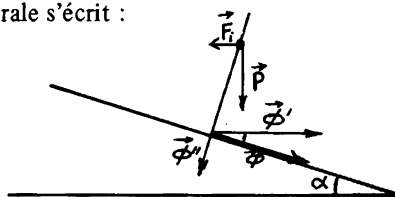
$\cos\alpha = 1$ donc :

$$\phi' = \phi = 200 \text{ N}$$

Grâce aux deux forces F_0 et ϕ le cycliste peut prendre le virage avec une
vitesse v_2 dont l'expression générale s'écrit :

$$F_0 + \phi = \frac{Mv_2^2}{r}$$

$$\frac{Mv_0^2}{r_0} + \phi = \frac{Mv_2^2}{r}$$



$$V_2^2 = \frac{V_0^2 r}{r_0} + \frac{\phi r}{M}, v_2 \text{ est proportionnelle à } r,$$

* Si r est maximal et égal à :

$$r' = 10 + 2,5 = 12,5 \text{ m}$$

$$v_2'^2 = \frac{(3,16)^2 \cdot 12,5}{10} + \frac{200 \cdot 12,5}{100}$$

$$v_2' = 6,12 \text{ m/s} = \underline{\underline{22 \text{ Km/h}}}$$

* Si r est minimal et égal à :

$$r'' = 10 - 2,5 = 7,5$$

$$v_2''^2 = \frac{(3,16)^2 \cdot 7,5}{10} + \frac{200 \cdot 7,5}{100}$$

$$v_2'' = 4,74 \text{ m/s} = \underline{\underline{17 \text{ Km/h}}}$$

En conclusions :

* Si la route est horizontale, grâce au frottement de son pneu sur le sol (ϕ), le cycliste peut avoir une vitesse maximale $v_{\max} = 18 \text{ Km/h}$ avec $r_{\max}$.

* Si le virage est relevé et le sol glissant, sa vitesse est de $11,4 \text{ Km/h}$.

* Si le virage est relevé et le sol sec, sa vitesse peut varier de 17 à 22 Km/h .



Ex. - 13 - :

Un ressort suspendu verticalement mesure, à vide, 25 cm . On mesure son allongement lorsqu'il est chargé et l'on constate que cet allongement est proportionnel à la charge et correspond à 5 mm pour 20 g .

1) On le charge de 100 g , on le tire verticalement vers le bas et on l'abandonne à lui-même.

Quel est le mouvement pris par la masse ? Quelle est sa période ? dépend-elle de l'amplitude ?

2) Le ressort chargé de 50 g , est placé dans un véhicule entraîné horizontalement par une force constante : il s'écarte de la verticale d'un angle de 15° . Montrer que l'on peut ainsi calculer l'accélération du mouvement et en déduire la longueur du ressort.

3) Le ressort est enfilé sur une tige horizontale et l'on y fixe une des extrémités O. A l'autre extrémité mobile, on attache une masse inconnue, mobile également sur la tige, et l'on fait tourner le tout autour d'un axe

vertical passant par O à raison de 120 tours à la minute.
 Quelle est la valeur de la masse mobile si le ressort mesure alors 32 cm ?

4) Que devient la longueur du ressort si la vitesse de rotation devient 180 tours à la minute ?

5) Le ressort chargé de 50g est lancé de telle sorte qu'il décrive un cône de révolution d'axe vertical et de demi-angle au sommet égal à 30° .
 Quelle est alors la longueur du ressort et quelle est la période du mouvement : $g = 9,8 \text{ u.SI.}$

SOLUTION :

1) La période est égale à :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$\text{avec } m = 0,1 \text{ Kg et } K = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8}{5 \cdot 10^{-3}} = 39,2 \text{ N/m}$$

donc :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0,1}{39,2}} = \frac{\pi}{10} \cong 0,31\text{s}$$

La période ne dépend pas de l'amplitude, elle est fonction seulement de m et K .

2) Si le véhicule est entraîné par une force F , il sera animé d'un mouvement uniformément varié. La force d'inertie F_i appliquée à la masse m et son poids P , vont tirer sur le ressort de telle façon qu'il prenne la direction qui fait un angle α avec la verticale, tel que :

$$\text{tg } \alpha = \frac{F_i}{P} = \frac{m\gamma}{mg} = \frac{\gamma}{g}$$

$$\text{d'où } \gamma = g \cdot \text{tg } \alpha = 9,8 \cdot \text{tg } 15^\circ = 2,62 \text{ m/s}^2$$

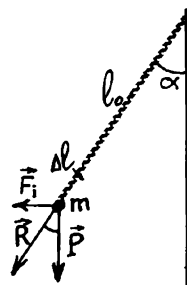
On voit que γ est fonction de α , on pourra toujours déterminer γ à partir de α . La résultante R de P et F_i est égale à :

$$R = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 9,8}{\cos 15} = 0,50 \text{ N}$$

L'allongement du ressort est égal à :

$$\Delta \ell = \frac{0,5}{39,2} = 0,012 \text{ m}$$

$$\text{d'où } \ell = \ell_0 + \Delta \ell = 0,25 + 0,012 = 0,262 \text{ m}$$



3) La force centrifuge qui agit sur m est égale à :

$$F = \omega^2 (\ell_0 + \Delta\ell') \cdot m$$

Elle est aussi égale à : $F = K \cdot \Delta\ell'$

d'où l'on tire :

$$m = \frac{K \cdot \Delta\ell'}{\omega^2 (\ell_0 + \Delta\ell')}$$

(1)



$$\text{avec } \omega = \frac{120}{60} \cdot 2\pi = 4\pi \text{ rad/s}$$

$$\ell_0 + \Delta\ell' = 32 \cdot 10^{-2} \text{ m et } \Delta\ell' = (32 - 25) \cdot 10^{-2} \\ = 7 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$m = \frac{39,7 \cdot 7 \cdot 10^{-2}}{16 \cdot \pi^2 \cdot 32 \cdot 10^{-2}} = 0,054 \text{ Kg} = \underline{\underline{54 \text{ g}}}$$

4) L'expression (1) peut aussi s'écrire :

$$\Delta\ell'' = \frac{m\omega^2 \ell_0}{K - m} \text{ avec } \omega = \frac{180}{60} \cdot 2\pi = 6\pi \text{ rad/s}$$

$$\Delta\ell'' = \frac{0,054 \cdot 36\pi^2 \cdot 25 \cdot 10^{-2}}{39,2 - (0,05 \cdot 36\pi^2)} = 24 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

$$\text{d'où } \ell_2 = \ell_0 + \Delta\ell'' = 49 \cdot 10^{-2} \text{ m} = \underline{\underline{49 \text{ cm}}}$$

5) $\vec{R}$ la force résultante de $\vec{P}$ et $\vec{F}_1$, qui tend le ressort est égale à :

$$R = \frac{P}{\cos\alpha}$$

$$R = \frac{0,05 \times 9,8}{0,86} = 0,56 \text{ N}$$

d'où le nouvel allongement.

$$\Delta\ell_1 = \frac{0,56}{39,2} \cong 0,015 \text{ m} = \underline{\underline{1,5 \text{ cm}}}$$

et $\ell_1 = 26,5 \text{ cm}$

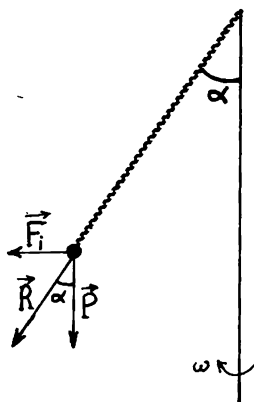
Calcul de la période de rotation :

on sait que :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell \cos\alpha}}$$

$$\text{d'où } T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cdot \cos\alpha}{g}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{0,265 \cdot 0,86}{9,8}} = \underline{\underline{0,96 \text{ s}}}$$



Ex. - 14* :

A un axe vertical Y'Y est fixé rigidement une tige horizontale OX. Sur cette tige est enfilé un ressort à boudin R de longueur, au repos $\ell_0 = 20\text{ cm}$. Une de ses extrémités est fixée à l'axe Y'Y, l'autre extrémité est attachée à une masse $m = 10\text{ g}$ qui peut glisser sans frottement le long de la tige horizontale OX.

Le ressort s'allonge de 1 cm pour une force de traction égale à $0,125\text{ N}$. On fait tourner l'ensemble autour de Y'Y avec une vitesse angulaire ω . Etablir la relation donnant l'allongement x du ressort en fonction de la vitesse angulaire ω , la masse m étant considérée comme ponctuelle. Le ressort ne pouvant, sans déformation permanente, dépasser une longueur de 1 m , quelle est la plus grande de rotation permise ?

Tracer, à une échelle que l'on indiquera, la courbe représentative des variations de la fonction $x = f(\omega)$.

Pour tracer cette courbe, on calculera en particulier les allongements pour des vitesses de rotation correspondant à 2 et 4 tours par seconde.

A l'aide du graphique, déterminer la vitesse de rotation correspondant à $x = 40\text{ cm}$.

SOLUTION :

Lorsque la vitesse de rotation est égale à ω , la force centrifuge qui s'exerce sur la masse m est :

$$F = m\omega^2 (\ell_0 + x)$$

Elle est équilibrée par la force de rappel du ressort, tel que : $F = K.x$

où K = constante de raideur du ressort, qui est égale à :

$$K = \frac{0,125}{10^{-2}} = 12,5\text{ N/m}$$

ainsi : $Kx = m\omega^2 (\ell_0 + x)$, qui peut s'écrire :

$$x = \frac{m\ell_0 \omega^2}{K - m\omega^2} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \omega^2}{12,5 - 10^{-2} \omega^2}$$

expression reliant x à ω et qui donne :

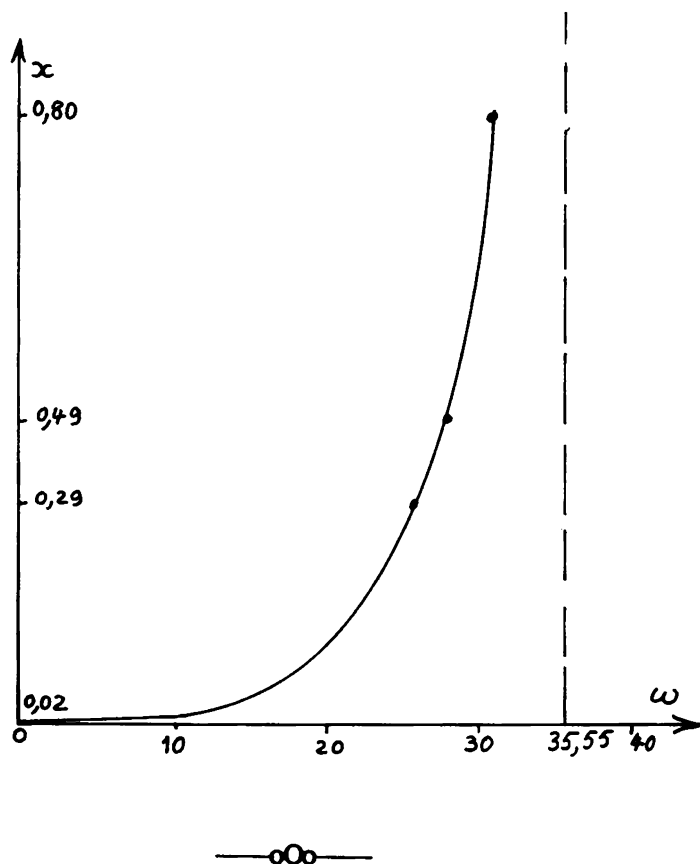
$$\text{pour : } x = 0,8\text{ m} \rightarrow \omega = 31,62\text{ rad/s} = \underline{\underline{5\text{ tours/s}}}$$

$$\omega = 2\text{ tours/s} = 4\pi\text{ rad/s} \rightarrow x = 0,02\text{ m} = 2\text{ cm}$$

$$\omega = 4\text{ tours/s} = 8\pi\text{ rad/s} \rightarrow x = 0,29\text{ m} = 29\text{ cm}$$

$$x = 40\text{ cm} = 0,4\text{ m} \rightarrow \omega = 28,86\text{ rad/s} = \underline{\underline{4,59\text{ tours/s}}}$$

La fonction $x = f(\omega)$ est symétrique, on ne représentera que la p artie correspondante à $\omega > 0$ qui représente un intérêt pour nous. Elle admet une asymptote verticale pour $\omega = 35,35$ rad/s. (vitesse angulaire maximale théorique).



Ex. - 15* :

I - Un solide destiné à devenir un satellite de la terre est porté par une fusée. La masse du satellite est 100 Kg. Pendant les 10 secondes suivant la mise à feu, la fusée, en ascension verticale, atteint la vitesse de 50m/s.

1) Calculer l'accélération, supposée constante, de la fusée et la distance parcourue pendant ces 10 secondes.

2) Quel est le poids apparent du satellite pendant cette phase du mouvement ? L'accélération de la pesanteur est supposée constante et égale à g_0 .

II - Ce satellite devrait graviter sur une orbite circulaire à une altitude de 19200 Km. L'accélération de la pesanteur varie en fonction de l'altitude, h suivant la loi :

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2}$$

Calculer la vitesse du satellite sur son orbite et la durée d'une révolution.

III - Ayant terminé sa mission, le satellite doit être récupéré en un point précis de la terre. Son retour est télécommandé jusqu'à une altitude de 8 Km. A cette hauteur des parachutes s'ouvrent de façon à maintenir la vitesse égale à 40m/s jusqu'à l'arrivée au sol. Soient A le point où les parachutes s'ouvrent, B le point où le satellite doit atterrir ; O et A sont sur la même verticale, OB est sur l'équateur (schéma). Quelle est la distance OB?



L'accélération de la pesanteur à la surface de la terre est $g_0 = 10\text{m/s}^2$. Le rayon de la terre vaut 6400 Km et est désigné par R et la circonférence de la terre à l'équateur mesure 40000 Km.

SOLUTION :

I - 1) Calcul de l'accélération :

$$\gamma = \frac{v}{t} = \frac{50}{10} = \underline{\underline{5\text{m/s}^2}}$$

La distance parcourue sera :

$$x = \frac{1}{2} \gamma t^2 = 0,5 \cdot 5 \cdot 100 = 250 \text{ m}$$

2) La force d'inertie s'ajoutant à son poids au repos, le p du satellite sera :

$$P = P_0 + M\gamma = M(g_0 + \gamma)$$

$$P = 100(10 + 5) = \underline{\underline{1500 \text{ N}}}$$

II - Pour rester sur une orbite circulaire donnée, il faut sur cette orbite soit égal à la force centrifuge :

$$P_h = M_{g_0} \frac{R^2}{(R+h)^2} \text{ et } F_c = \frac{Mv^2}{R+h}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } v &= R \sqrt{\frac{g_0}{R+h}} \\ &= 64 \cdot 10^5 \sqrt{\frac{10}{64 \cdot 10^5 + 192 \cdot 10^5}} = \underline{\underline{4 \cdot 10^3 \text{ m}}} \end{aligned}$$

La durée d'une révolution sera :

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v} = \frac{2\pi \cdot 10^5(64+192)}{4 \cdot 10^3} = 11\text{H}10'12''$$

III - Le satellite aura une durée de chute en parachute égale

$$t_1 = \frac{8 \cdot 10^3}{40} = 200 \text{ s}$$

Pendant ce temps-là la terre aura effectué une rotation

$$\alpha = \omega t \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} ; \text{ vitesse de rotation tour par jour}.$$

Donc :

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot 200}{24 \cdot 3600} = \frac{\pi}{216} \text{ rad}$$

L'arc de cercle correspondant sera :

$$OB = s = R \cdot \alpha = \frac{\pi}{216} \cdot 64 \cdot 10^5 = 93 \text{ Km}$$



Chapitre sixième

LE MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOIDAL

FORMULAIRE

A) CINEMATIQUE

Equation horaire : $x = a \sin (\omega t + \phi)$

x : élongation ou abscisse (m)

a : amplitude (m)

ω : pulsation (rad/s)

ϕ : phase initiale (rad.)

$\omega t + \phi$: phase instantanée

La vitesse : $v = \frac{dx}{dt} = a \omega \cos (\omega t + \phi)$

L'accélération : $\gamma = \frac{dv}{dt} = -a \omega^2 \sin (\omega t + \phi) = -\omega^2 x$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

T : période (s)

f : fréquence (hertz)

Détermination de la phase initiale d'après les données de x_0 , abscisse initiale ; a l'amplitude et le signe de la vitesse. l'équation :

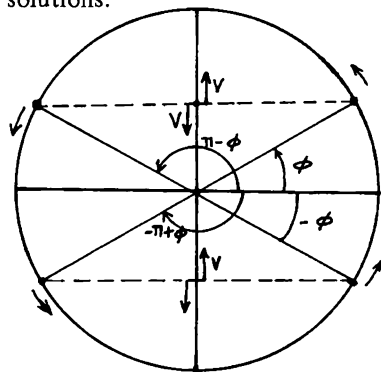
$$\frac{x_0}{a} = \sin \phi, \text{ admet deux solutions.}$$

En se référant au cercle trigonométrique on voit que si $\frac{x_0}{a} > 0$; ϕ sera la phase

initiale si $v > 0$ et $\pi - \phi$ sera la phase initiale si $v < 0$; par contre si :

$\frac{x_0}{a} < 0$, $-\phi$ sera la phase initiale si $v > 0$.

$(\pi + \phi)$ sera la phase initiale si $v < 0$.



B) DYNAMIQUE :

Pour un ressort de constante de raideur $K = \frac{F}{\Delta x}$ où F est une force qui lui est appliquée et Δx , l'allongement qui lui correspond ; on a la période T d'oscillation, d'une masse m, égale à :

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$



Ex. - 1 - :

Trouver la phase initiale des mobiles suivants, animés d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude 2m si à l'instant $t=0$ on a :

- | | |
|----------------------|-----------|
| 1) $x_0 = \sqrt{3}m$ | $v_0 > 0$ |
| 2) $x_0 = \sqrt{3}m$ | $v_0 < 0$ |
| 3) $x_0 = +1m$ | $v_0 > 0$ |
| 4) $x_0 = +1m$ | $v_0 < 0$ |
| 5) $x_0 = -1m$ | $v_0 > 0$ |
| 6) $x_0 = -1m$ | $v_0 < 0$ |

SOLUTION :

L'équation horaire d'un tel mouvement est :

$$x = a \sin (\omega t + \phi)$$

$$t = 0 \rightarrow \frac{x_0}{a} = \sin \phi$$

Déterminer la phase initiale revient à résoudre cette équation trigonométrique qui comme on le sait admet deux solutions : ϕ et $(\pi - \phi)$.
Suivant les cas, l'une correspondra à $V_0 > 0$ et l'autre à $V_0 < 0$. Ainsi on va avoir :

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1) $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \phi$ | $\phi = \frac{\pi}{3} (V_0 > 0)$ |
| 2) $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \phi$ | $\phi = (\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3} (V_0 < 0)$ |
| 3) $\frac{1}{2} = \sin \phi$ | $\phi = \frac{\pi}{6} (V_0 > 0)$ |
| 4) $\frac{1}{2} = \sin \phi$ | $\phi = (\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6} (V_0 < 0)$ |
| 5) $-\frac{1}{2} = \sin \phi$ | $\phi = -\frac{\pi}{6} (V_0 > 0)$ |
| 6) $-\frac{1}{2} = \sin \phi$ | $\phi = +\frac{7\pi}{6} (V_0 < 0)$ |



Ex. - 2 - :

Un mobile animé d'un mouvement sinusoïdal a pour amplitude $a = 2m$.
A l'instant $t=0$, il se trouve à $x_0 = +1m$ et sa vitesse positive. Sa période $T = 2s$.

- 1) Ecrire son horaire équation.

2) Trouver les temps de passage à l'abscisse $x_1 = \sqrt{3}m$.

SOLUTION :

1) L'équation horaire s'écrit :

$$x = a \sin (\omega t + \phi)$$

$$\text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s}$$

Calculons ϕ . On sait que pour $t=0$, $x_0 = +1m$ donc :

$$\sin \phi = \frac{1}{2}$$

Cette équation admet deux solutions :

$$\phi' = \frac{\pi}{6} \text{ et } \phi'' = \frac{5\pi}{6}$$

La première correspond à la vitesse initiale positive et la deuxième à une vitesse négative.

Donc l'équation horaire sera :

$$x = 2 \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$2) \text{ Si } x = \sqrt{3}, \text{ on a : } \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{6} \right)$$

qui donne deux types de solutions :

$$a) \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2\pi K \text{ (Vitesse positive)}$$

$$t = \left(\frac{1}{6} + 2K \right) s \text{ (} K = 0, 1, 2, \dots \text{)}$$

$$b) \pi t + \frac{\pi}{6} = \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2K\pi \text{ (Vitesse négative).}$$

$$t' = (0,5 + 2K) s$$

Ainsi les passages à x_1 se succéderont comme suit :

$$\frac{1}{6} s ; 0,5 s ; \frac{13}{6} s ; 2,5 s ; \frac{25}{6} s ; 4,5 s ; \dots$$

Les passages impairs en vitesse positive et les passages pairs en vitesse négative.



Ex. - 3 - :

Un mouvement sinusoïdal est tel que pour $t = 0$ on a :

$$x_0 = + 2\text{m et } v_0 = + 2\sqrt{3}\pi\text{m/s}$$

Trouver sa phase initiale et sa période si l'amplitude est $a = 4\text{ m}$.

SOLUTION :

$$\text{On a : } \frac{x_0}{a} = \sin \phi = \frac{1}{2}$$

$$\text{La vitesse positive, donc } \phi = \frac{\pi}{6}$$

L'expression qui donne la vitesse est : $v = a \omega \cos(\omega t + \phi)$

$$\text{d'où } \omega = \frac{v_0}{a \cos \phi} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \pi \text{ rad/s}$$

Et enfin :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{\underline{2\text{ s}}}$$

**Ex. - 4 - :**

Un mouvement sinusoïdal d'amplitude 20cm a pour période $T = 2\text{s}$, à l'instant $t=0$ son abscisse est $x_0 = -10\text{cm}$ avec une vitesse positive.

1) Calculer son équation horaire.

2) Trouver son abscisse à $t = 1\text{s}$ et $t = 2,5\text{s}$.

SOLUTION :

$$1) \text{ L'équation horaire s'écrit à } t=0: \frac{x_0}{a} = \sin \phi = \frac{-10}{20} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{La vitesse étant positive on prendra : } \phi = -\frac{\pi}{6}$$

$$\text{donc : } x = 20 \cdot 10^{-2} \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$$

2) Si $t = 1\text{ s}$:

$$x_1 = 20 \cdot 10^{-2} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$x_1 = 10 \cdot 10^{-2}\text{m, avec une vitesse négative.}$$

Si $t = 2,5 \text{ s}$:

$$\begin{aligned}x_2 &= 20 \cdot 10^{-2} \sin \left(2,5\pi - \frac{\pi}{6} \right) = 20 \cdot 10^{-2} \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \\&= 20 \cdot 10^{-2} \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{3} \right)\end{aligned}$$

Après avoir fait un aller-retour complet (2π) il sera à :

$$x_2 = 20 \cdot 10^{-2} \sin \frac{\pi}{3} = 10^{-1} \sqrt{3}, \text{ avec une vitesse positive.}$$



Ex. - 5 - :

Trouver les constantes de raideur des ressorts suivants, sachant que :

- 1) 10 gf provoque un allongement de 1mm
- 2) 20 gf provoque un allongement de 1cm
- 3) 100gf provoque un allongement de 10cm
- 4) Une masse de 50 g provoque un allongement de 1 cm
- 5) Une masse de 200 g provoque un allongement de 10 cm
- 6) Une masse de 1 Kg provoque un allongement de 10 cm.

On prendra $g = 10 \text{ m/s}^2$.

SOLUTION :

$$K = \frac{F}{\Delta x}; K \text{ est exprimé en N/m ; } F \text{ en newton et } \Delta x \text{ en mètres.}$$

$$1) K = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{10^{-3}} = 100 \text{ N/m}$$

$$2) K = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{10^{-2}} = 20 \text{ N/m}$$

$$3) K = \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{10 \cdot 10^{-2}} = 10 \text{ N/m}$$

$$4) K = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{10^{-2}} = 50 \text{ N/m}$$

$$5) K = \frac{200 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{10 \cdot 10^{-2}} = 20 \text{ N/m}$$

$$6) K = \frac{1 \cdot 10}{10 \cdot 10^{-2}} = 100 \text{ N/m}$$

Ex. - 6 - :

Calculer la période des oscillations d'une masse de 400g, suspendue à un ressort élastique qui s'allongerait de 10cm sous l'action d'une force de 1 N.

SOLUTION :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 6,28 \sqrt{\frac{0,4}{10}} = 1,25 \text{ s}$$



Ex. - 7 - :

Quelle est la masse m_2 , qui suspendue à un ressort a une période $T_2=3\text{s}$, sachant que si l'on suspend à ce même ressort une masse $m_1=400 \text{ g}$, la période de celle-ci est : $T_1 = 6 \text{ s}$.

SOLUTION :

On sait que la période est proportionnelle à la racine carrée de la masse.
Donc on peut écrire :

$$\frac{T_1}{\sqrt{m_1}} = \frac{T_2}{\sqrt{m_2}}$$

$$m_2 = m_1 \frac{T_2^2}{T_1^2}$$

$$m_2 = 0,4 \frac{9}{36} = 0,1 \text{ Kg} = \underline{\underline{100 \text{ g}}}$$



Ex. - 8 - :

Une masse suspendue à un premier ressort dont la raideur $K_1=10\text{N/m}$, a une période d'oscillation T_1 . Cette même masse est suspendue à un deuxième ressort et oscille avec une période deux fois plus grande, trouver le coefficient de raideur K_2 du deuxième ressort.

SOLUTION :

On sait que la période est inversement proportionnelle à la racine carrée de la raideur ; donc on pourra écrire :

$$T_1 \cdot \sqrt{K_1} = T_2 \cdot \sqrt{K_2} \text{ d'où : } K_2 = K_1 \frac{T_1^2}{T_2^2} = 10 \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{2,5 \text{ N/m}}}$$

Ex. - 9* :

Un point matériel M de masse 100 g exécute un mouvement rectiligne sous l'action d'une force f qui l'attire vers un point fixe O de sa trajectoire et dont l'intensité est proportionnelle à la distance OM. Quand le mobile est à 1 cm du point O, la force F a une intensité de $3,6 \cdot 10^{-2}$ N.

- 1) Déterminer la période du mouvement sinusoïdal ainsi produit.
- 2) On prendra comme origine des abscisses le point O. A la date zéro le mobile est en O animé d'une vitesse de 30 cm/s dans un sens que l'on adoptera comme sens positif sur la trajectoire. Ecrire les équations qui donnent en fonction du temps l'abscisse x du mobile, sa vitesse $\bar{v}$, son accélération $\bar{\gamma}$ et la mesure algébrique de la force $\bar{f}$.
- 3) Calculer à quelle date le mobile passe pour la première fois par le point d'abscisse $x = -3$ cm en se mouvant dans le sens positif.

SOLUTION :

- 1) On sait que si une force f est appliquée à une masse et qu'elle est proportionnelle à $OM=x$, l'élongation ; le mouvement est rectiligne sinusoïdal, on a :

$$F = -m\omega^2 x = -Kx.$$

$$\text{et } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ (période du mouvement).}$$

$$\text{avec } K = \frac{3,6 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}} = 3,6 \text{ N/m.}$$

$$\text{d'où } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,1}{3,6}} = \frac{\pi}{3} \text{ s.}$$

$$T = \underline{\underline{1,05 \text{ s}}}$$

- 2) Le mouvement étant sinusoïdal, on a :

L'élongation

$$x = a \sin (\omega t + \phi)$$

La vitesse

$$v = a\omega \cos (\omega t + \phi)$$

L'accélération

$$\gamma = -\omega^2 x$$

La force

$$f = m\gamma = -m\omega^2 x$$

Où : a est l'amplitude, ω la pulsation et ϕ la phase initiale.

Calculons ces trois grandeurs :

$$\begin{aligned}\text{on a : } \omega &= \frac{2\pi}{T} = \\ &= \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

A l'instant $t = 0$, le mobile est en 0, donc :

$$\begin{aligned}\sin \phi &= 0 \\ \phi &= 0 \quad (v > 0)\end{aligned}$$

D'après l'expression de la vitesse, à $t = 0$, on a :

$$V_0 = a\omega \quad (\cos \phi = 1)$$

$$\text{d'où : } 0,3 = a \cdot 6.$$

$$\underline{a = 5 \text{ cm}}$$

3) L'expression de l'élongation nous donne :

$$-3 \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 6t$$

En utilisant les radians comme unité d'angles, et sachant que la vitesse est positive :

$$6t = 5,6$$

$$t = 0,9 \text{ s}$$

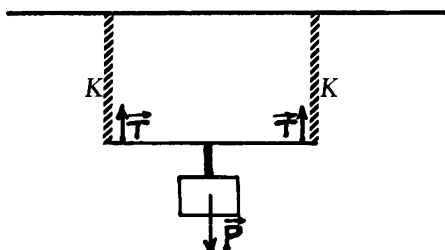


Ex. - 10 - :

Une masse M est accrochée à une tige de masse négligeable qui à son tour est accrochée à deux ressorts identiques de constante de raideur K (voir figure).

Calculer la période d'oscillation de M .

A.N. : $M = 200 \text{ g}$; $K = 1 \text{ N/m}$.



SOLUTION :

Nous avons au repos, les deux ressorts allongés de x_0 , tel que :

$$P = 2T = 2K x_0 \quad (1)$$

Si on tire sur M jusqu'à avoir un allongement x en plus de x_0 , on a :

$$T' = K(x_0 + x)$$

Si on relâche M, on aura un mouvement dont l'accélération vérifie l'expression :

$$P - 2T' = M\gamma$$

qui peut s'écrire :

$$P - 2K(x_0 + x) = M\gamma$$

$$P - 2Kx_0 - 2Kx = M\gamma$$

grâce à (1) on peut écrire :

$$-2Kx = M\gamma$$

$$\gamma = \frac{-2K}{M} x = -\omega^2 x, \text{ ce qui nous donne :}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{M}} \text{ et } T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{2K}}$$

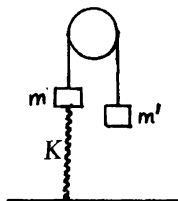
$$\text{A. N. : } T = 2\pi \sqrt{\frac{0,2}{2 \cdot 1}} = \underline{\underline{1,98 \text{ s}}}$$



Ex. - 11 - :

Deux masses m et m' sont suspendues de part et d'autre d'une poulie de masse négligeable. La masse m est accrochée vers le bas à un ressort (figure) de constante de raideur K . On tire m' vers le bas et on lâche, le système se met à osciller. Trouver sa période.

A.N. $m = 100 \text{ g}$; $m' = 200 \text{ g}$; $K = 0,4 \text{ N/m}$.



SOLUTION :

Avant de tirer sur la masse, le système est en équilibre et satisfait l'égalité suivante :

$$F = F'$$

On a :

$$P' - P - F_0 = 0 \quad (1)$$

où : $F_0 = Kx_0$ la force due à l'élasticité du ressort.

Après avoir tiré sur la masse m' , le mouvement du système est accélérée et pour une position x on a :

$$P' - P - K(x_0 + x) = (m + m')\gamma$$

qui peut s'écrire :

$$P' - P - Kx_0 - Kx = (m + m')\gamma$$

En prenant en considération (1), on a :

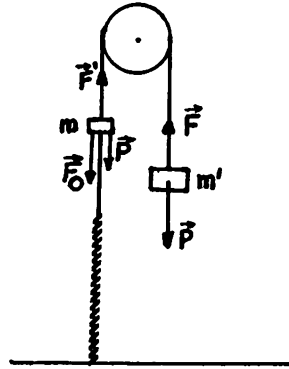
$$-Kx = (m + m')\gamma$$

et on peut écrire :

$$\gamma = -\frac{K}{m + m'} x = -\omega^2 x$$

d'où :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + m'}{K}}$$



Le ressort oscille comme dans le cas où les deux masses étaient accrochées au ressort sans la poulie.

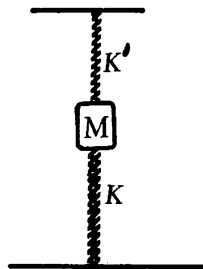
A. N : $T = 2\pi \sqrt{\frac{0,1 + 0,3}{0,4}} = 6,28 \text{ s}$



Ex. - 12 - :

Deux ressorts K et K' sont fixés à deux points A et B fixes (figure) par une extrémité. Les autres extrémités sont reliées à une masse ponctuelle M. On tire la masse M vers le bas et on lâche le système libre. Calculer la période du mouvement.

A.N. : $M = 200 \text{ g} ; K = 0,5 \text{ N/m} ; K' = 0,3 \text{ N/m}.$



SOLUTION :

Au repos, le système satisfait l'équation d'équilibre suivante :

$$P + F'_O - F_O = 0$$

avec :

$$F_O = Kx_O$$

$$F'_O = K'x'_O$$

où x_O et x'_O sont les allongements dus au poids de M. On tire vers le bas la masse M, on aura :

$$F = K(x_O + x)$$

$$F' = K'(x'_O - x)$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$P + F' - F = M\gamma$$

$$P + K'(x'_O - x) - K(x_O + x) = m\gamma$$

Avec l'équation (1) on obtient :

$$-(K' + K)x = M\gamma$$

$$\gamma = -\frac{K' + K}{M}x = -\omega^2 x$$

d'où

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K + K'}}$$

A. N :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0,2}{0,5 + 0,3}} = 3,14 \text{ s}$$



Ex. - 13 - :

Considérons un cube de bois flottant sur l'eau. Si on enfonce ce cube dans l'eau et qu'on le lâche, il est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal verticalement. Calculer la période du mouvement.

A. N. : L'arête du cube est égale à 5cm, sa masse $m=100\text{g}$. La masse volumique de l'eau $\rho = 1\text{Kg/dm}^3$.

SOLUTION :

Le cube au repos est soumis à son poids et à la poussée d'archimède :

$$P - \rho.S.h = 0 \dots \quad (1)$$

où ρ : masse volumique du liquide déplacé

S : Surface d'une face du cube

h : Hauteur de la partie plongée dans l'eau

Si on enfonce le cube d'une longueur x ; quand on le lâche, on a :

$$P - \rho S(h + x) = m\gamma \dots \quad (2)$$

(1) et (2) donnent :

$$-\frac{\rho \cdot S \cdot x}{m} = \gamma = -\omega^2 x$$

d'où:

$$\omega^2 = \frac{\rho S}{m}$$

$$\text{et : } T = 2\pi \sqrt{\frac{0,1}{25 \cdot 10^{-4}}} = \underline{\underline{3,9 \text{ s}}}$$

— oO —

Chapitre septième

ROTATION D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE

FORMULAIRE

La relation fondamentale de la dynamique pour un solide en rotation ;

$$\vec{M} = J \cdot \alpha''$$

où M (N.m) le moment résultant par rapport à l'axe de rotation des forces extérieures.

J (Kg. m²) : Le moment d'inertie.

α'' (rad/s²) : l'accélération angulaire.

Le moment d'inertie d'une circonférence pesante :

$$J = mR^2$$

D'un disque homogène et d'un cylindre :

$$J = \frac{1}{2} mR^2$$

D'une sphère :

$$J = \frac{2}{5} mR^2$$

Théorème de HUYGHENS :

$$J(\Delta') = J(\Delta) + md^2$$

Pour le mouvement sinusoïdal de rotation :

$$\alpha = \alpha_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$\alpha' = \omega \alpha_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\alpha'' = -\omega^2 \cdot \alpha.$$

avec

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$M = J \cdot \alpha'' = -J \omega^2 \cdot \alpha.$$

avec : $M = -C \cdot \alpha$

M : Moment de rappel (N.m)

C : Constante de torsion (m.N/rad)

Ainsi :

$$C = J \cdot \omega^2$$

et

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$$

• Ex. - 1 - :

Une machine d'Atwood a une poulie de masse 50g et des cylindres C et C' de masses $M_1 = 400\text{g}$ et $M_2 = 100\text{g}$. Calculer l'accélération dans les quatre cas suivants :

- 1) En négligeant la masse de la poulie.
- 2) En assimilant la poulie à un disque de masse 50g.
- 3) En prenant en considération la masse de la poulie et en l'assimilant à une circonférence pesante.
- 4) En assimilant la poulie à une sphère.

SOLUTION :

- 1) En négligeant la masse de la poulie on a :

$$\gamma_1 = g \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} = 10 \frac{300 \cdot 10^{-3}}{500 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{6\text{m/s}^2}}$$

- 2) Si on assimile la poulie a un disque, son moment d'inertie est égal à :

$$J_1 = mr^2$$

L'accélération deviendra :

$$\gamma_2 = g \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + m} = 10 \frac{300 \cdot 10^{-3}}{550 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{5,45\text{m/s}^2}}$$

- 3) Si la poulie est assimilée à une circonférence, on a :

$$\gamma_3 = g \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + \frac{m}{2}} = 10 \frac{300 \cdot 10^{-3}}{525 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{5,71\text{m/s}^2}}$$

- 4) Dans le cas où la poulie est assimilée à une sphère :

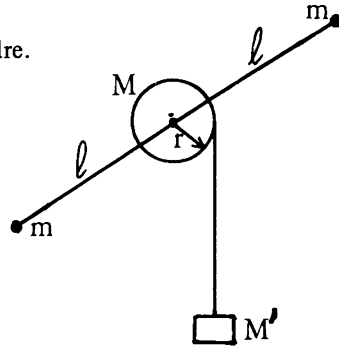
$$\gamma_4 = g \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + \frac{2}{5} m} = 10 \frac{300 \cdot 10^{-3}}{520 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{5,76\text{m/s}^2}}$$



• Ex. - 2* :

Un cylindre de masse $M = 1 \text{ Kg}$ et de rayon $r = 4 \text{ cm}$, tourne autour de son axe horizontal. Un fil de masse négligeable, enroulé autour de ce cylindre soutient un corps de masse $M' = 40 \text{ g}$. Le cylindre est traversé d'une tige de longueur $2\ell = 1 \text{ m}$. Aux extrémités de cette tige sont fixées deux masses ponctuelles $m = 10 \text{ g}$. Le système est abandonné à lui-même ; calculer :

- 1) L'accélération angulaire α'' du cylindre.
- 2) L'accélération γ du corps M' .
- 3) La tension du fil.
Après 3s de chute de M' , le fil casse ; calculer :
- 4) La vitesse de M' ,
- 5) La vitesse angulaire du cylindre,
- 6) La distance parcourue par M' ,
- 7) Le nombre de tours effectués par le cylindre. ($g = 10 \text{ m/s}^2$).



SOLUTION :

- 1) Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au système en rotation ; on a :

$$M = J \cdot \alpha'' \quad \Leftrightarrow \quad \alpha'' = \frac{\sum \vec{P} \cdot \vec{r}}{J}$$

avec le moment des forces appliquées au cylindre :

$$M = (P' + T' - T) r = P' r = M' g r$$

$$J = 2m\ell^2 + \frac{1}{2} Mr^2 ; \text{ Le moment d'inertie}$$

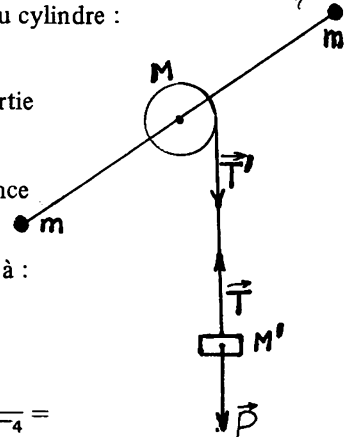
du système cylindre-petites masses. Les masses sont assimilées à une circonférence pesante.

Ainsi l'accélération angulaire sera égale à :

$$\alpha'' = g \frac{M' r}{2m\ell^2 + 0,5 \cdot Mr^2}$$

$$\alpha'' = 10 \frac{4 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 25 \cdot 10^{-2} + 0,5 \cdot 1 \cdot 16 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= \frac{160}{58} = 2,76 \text{ rad/s}^2$$



- 2) On sait que α'' et γ (les accélérations:angulaire et linéaire) sont reliées par :

$$\gamma = r. \alpha''$$

$$\text{d'où } \gamma = 4.10^{-2} \cdot 2,76 = \underline{\underline{0,11 \text{ m/s}^2}}$$

- 3) La tension du fil s'écrit, en appliquant la relation fondamentale de la dynamique au corps M' :

$$P' - T = M' \gamma$$

$$T = M' (g - \gamma) = 0,04 (10 - 0,11) = \underline{\underline{0,39 \text{ N}}}$$

- 4) La vitesse de M' est égale à, en prenant en considération que sa vitesse initiale est nulle :

$$v = \gamma t = 0,11 \cdot 3 = \underline{\underline{0,33 \text{ m/s}}}$$

- 5) La vitesse angulaire est alors égale à :

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{0,33}{4.10^{-2}} = \underline{\underline{8,25 \text{ rad/s}}}$$

- 6) La distance parcourue par M' est telle que :

$$x = \frac{1}{2} \gamma t^2 = 0,5.0,11.9 \cong \underline{\underline{0,49 \text{ m}}}$$

- 7) Pendant ce temps, le cylindre a parcouru un angle α :

$$\alpha = \frac{x}{r} = \frac{0,49}{4.10^{-2}} \cong \underline{\underline{12,25 \text{ rad.}}}$$

C'est-à-dire :

$$N = \frac{12,25}{2\pi} \cong 2 \text{ tours}$$



Ex. - 3 - :

Un gyroscope qu'on peut assimiler à un disque de masse $m=200\text{g}$ et de rayon $r=4\text{cm}$, tourne autour de son axe de révolution à une vitesse de 7200 tours/minute. En le serrant entre deux doigts, on le freine et il s'arrête au bout de 2 minutes.

- 1) Trouver l'accélération angulaire,
- 2) Trouver le couple résistant appliqué par les doigts,
- 3) Le nombre de tours effectués avant l'arrêt.

SOLUTION :

1) On sait que l'accélération angulaire α'' , est égale à :

$$\alpha'' = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{-7200 \cdot 2\pi}{60 \cdot 2 \cdot 60} = - \frac{2\pi \text{ rad/s}^2}{\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\quad}}}}}}}$$

2) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au gyroscope en rotation, on a :

$$M = J \cdot \alpha''$$

où M : moment des forces de freinage

J : moment d'inertie du disque ; c'est-à-dire :

$$J = \frac{1}{2} m r^2 = 0,016 \text{ Kg. m}^2$$

$$\text{et } M = -0,016 \cdot 2\pi = \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{0,1 \text{ N.m}}}}}}}$$

3) L'angle parcouru par le disque avant l'arrêt :

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\alpha''}$$

$$\alpha = \left(\frac{7200 \cdot 2\pi}{60} \right)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2\pi} = 14.400\pi \cdot \text{rad.}$$

$$\text{d'où } N = \frac{\alpha}{2\pi} = \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{7200 \text{ tours}}}}}}}$$



• **Ex. - 4*** :

Sur la gorge d'une poulie de masse 100g ; de rayon $r=6\text{cm}$; mobile sans frottement autour d'un axe horizontal, passe un fil de masse négligeable. Ce fil porte une masse $M=300\text{g}$ et une masse $m=100\text{g}$. La masse M se trouve à 3 mètres au dessus du sol ; la masse m est au niveau du sol sans toutefois y reposer. On abandonne le système au temps zéro.

- 1) Calculer l'accélération prise par la masse M en appliquant à la poulie, la relation fondamentale de la dynamique du solide en rotation,
- 2) Calculer la tension de chaque fil pendant le mouvement,
- 3) Calculer la vitesse de M quand elle arrive au sol,
- 4) Quelle est alors la vitesse angulaire de la poulie ? Quelle force F faut-il appliquer tangentiellement à la poulie pour qu'elle s'arrête au bout de 6 tours ? Le fil supportant m étant coupé quand M arrive au sol.

On suppose toute la masse de la poulie répartie sur sa circonférence.
On donne $g = 10 \text{ u. SI}$.

SOLUTION :

1) La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la poulie s'écrit :

$$M = J \cdot \alpha'' = J \frac{\gamma}{r}$$

où M : Moment résultant des forces.

J : Moment d'inertie.

γ : Accélération tangentielle.

avec :

$$M = r(T_1 - T_2)$$

$$T_1 = P_1 - M\gamma \text{ et } T_2 = P_2 + m\gamma$$

$$J = m' r^2 \text{ (} m' : \text{masse de la poulie)}$$

d'où :

$$\gamma = g \frac{M - m}{M + m + m'} = 10 \cdot \frac{2}{5} = \underline{\underline{4 \text{ m/s}^2}}$$

2) D'après ce qui précède, on a :

$$T_1 = M(g - \gamma) = 0,3 (10 - 4) = \underline{\underline{1,8 \text{ N}}}$$

$$T_2 = m(g + \gamma) = 0,1 (10 + 4) = \underline{\underline{1,4 \text{ N}}}$$

3) A l'arrivée au sol, la vitesse de M est :

$$V^2 = 2 \gamma h \text{ où } h = 3 \text{ m}$$

$$V = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 3} = \underline{\underline{4,9 \text{ m/s}}}$$

4) a- La vitesse angulaire de la poulie à ce moment, sera :

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{4,9}{6 \cdot 10^{-2}} = 81,66 \text{ rad/s} = \underline{\underline{780 \text{ tours/minute}}}$$

b- Si on veut que la poulie s'arrête au bout de $\alpha_2 = 6$ tours, sa décélération angulaire α_2'' sera telle que :

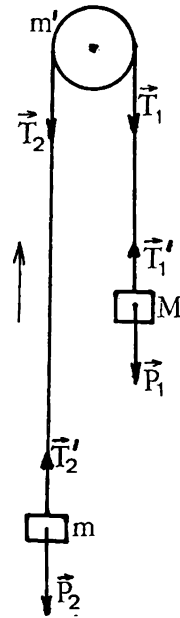
$$\alpha_2'' = \frac{\omega^2}{2\alpha_2} = \frac{(81,66)^2}{2 \cdot 6 \cdot 2\pi}$$

$$\alpha_2'' = \underline{\underline{88,44 \text{ rad/s}^2}}$$

La force qui donne cette décélération est égale à :

$$F r = m' r^2 \alpha_2''$$

$$F = m' r \alpha_2'' = 0,1 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot 88,44 = \underline{\underline{0,53 \text{ N}}}$$



Ex. - 5* :

Une barre rigide AB, de milieu O, pesant 125g, longue de 60 cm, est solidaire d'un tambour cylindrique T, d'axe horizontal, de masse négligeable, de 3 cm de rayon. L'axe du tambour est perpendiculaire en O à la barre. L'ensemble admet pour axe de symétrie, l'axe du tambour et peut tourner sans frottement autour de cet axe.

On fixe à chaque extrémité de la barre une masse supposée ponctuelle de 200g. Le système S: barre-tambour-masses, est mis en rotation grâce à une masse M de 50g suspendue à un fil enroulé sur le tambour. Quand la masse M a parcouru 96cm, le fil est coupé et la force motrice supprimée instantanément.

- 1) Etudier sans calcul, les deux phases du mouvement du système S.
- 2) Calculer le moment d'inertie du système par rapport à son axe.
- 3) Quelles sont, au moment où le fil est coupé, la vitesse angulaire du système S, la vitesse linéaire de M.
- 4) En réalité, le système, effectivement lancé à la vitesse précédemment calculée, s'arrête après avoir fait 120 tours à partir du moment où la force motrice est supprimée. Calculer le moment du couple, supposé constant, auquel sont équivalentes les forces de frottement.

Moment d'inertie d'une barre de masse m, de longueur 2ℓ , par rapport à un axe perpendiculaire à la barre et passant par son milieu :

$$J = \frac{m \cdot \ell^2}{3} \quad (g = 10 \text{ m/s}^2)$$

SOLUTION :

1) Avant que le fil ne casse, le système est soumis à l'effet d'une force ($P = mg$) qui est motrice. L'ensemble a un mouvement de rotation uniformément accéléré. Quand le fil casse, il est décéléré, par l'effet des forces de frottement, jusqu'à l'arrêt complet.

2) Le moment d'inertie d'un tel système est égal à :

$$J = J_1 + J_2$$

où J_1 : moment d'inertie de la barre :

$$J_1 = \frac{m \cdot \ell^2}{3} = \frac{0,125 \cdot (0,3)^2}{3} = 0,375 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

et J_2 : moment d'inertie des masses ponctuelles :

$$J_2 = 2m' \cdot \ell^2 = 2 \cdot 0,2 \cdot (0,3)^2 = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

d'où :

$$\underline{\underline{J = 3,975 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}}}$$

3) Pendant la phase d'accélération, on a :

$$M_1 = J \cdot \alpha_1''$$

avec :

$$M_1 = R \cdot M \cdot g, \text{ le moment de la force motrice.}$$

On a donc :

$$\alpha_1'' = \frac{R \cdot M \cdot g}{J} = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10}{3,975 \cdot 10^{-2}} = 0,37 \text{ rad/s}^2$$

. La vitesse angulaire du système sera égale (après avoir balayé un angle α) à :

$$\alpha = \frac{0,96}{2\pi}$$

$$\omega^2 = 2 \cdot \alpha_1'' \cdot \alpha$$

$$\omega = \sqrt{\frac{0,96 \cdot 0,37}{\pi}} = 0,33 \text{ rad/s}$$

. La vitesse linéaire de M est :

$$v = \omega R = \underline{\underline{10^{-2} \text{ m/s}}}$$

4) A cause des forces de frottement, le système a un mouvement décéléré, avec :

$$\alpha_2'' = \frac{\omega^2}{2\alpha}$$

$$\text{si } \alpha = 120,2 \pi$$

$$\alpha_2'' = \frac{(0,33)^2}{2 \cdot 120,2\pi} \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}^2$$

Le couple des forces de frottement est égal à :

$$M_2 = J \cdot \alpha_2''$$

$$M_2 = 3,975 \cdot 7 \cdot 10^{-7} \approx \underline{\underline{28 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m}}}$$



Ex. - 6* :

Un disque homogène de masse $M=100\text{g}$ et de rayon $R=10\text{cm}$ tourne autour de son axe. On enroule autour de lui un fil, à l'aide duquel on peut lui appliquer une force tangentielle.

1) On tire sur le fil avec une force constante et égale au poids du disque. Au bout de combien de temps, ce dernier partant du repos, aura-t-il effectué un tour ? Quelle sera alors sa vitesse angulaire ?

2) Montrer que dans les conditions du paragraphe précédent, les arcs décrits par un point quelconque du mobile, dans des intervalles de temps successifs égaux, forment une progression arithmétique.

3) Le disque ayant été lancé à raison de 10 tours par seconde, on constate que sous l'influence de diverses causes de freinage, la vitesse d'un point de la périphérie diminue régulièrement et qu'il finit par s'arrêter au bout de 5 minutes. Calculer le nombre de tours effectués par le disque avant l'arrêt total et le moment du couple de freinage.

SOLUTION :

1) Appliquons la relation fondamentale de la dynamique pour un corps en rotation :

$$M = J \cdot \alpha''.$$

où $M = Mg \cdot r$; Moment de la force qui est le poids du disque.

$$J = \frac{1}{2} Mr^2 \text{ ; Moment d'inertie du disque.}$$

L'accélération α'' , aura pour expression :

$$\alpha'' = \frac{2g}{r} = \frac{20}{10^{-1}} = 200 \text{ rad/s}^2$$

Le temps nécessaire pour parcourir un tour (2π rad) est tel que :

$$2\pi = \frac{1}{2} \alpha'' \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{4\pi}{200}} = \underline{\underline{0,25 \text{ s}}}$$

Sa vitesse angulaire sera alors :

$$\omega = \alpha'' \cdot t = 200 \cdot 0,25 = \underline{\underline{50 \text{ rad/s}}}$$

2) L'équation donnant l'angle en fonction du temps, peut s'écrire pour l'arc de cercle S :

$$s = \alpha \cdot r = \frac{1}{2} \alpha'' \cdot r \cdot t^2$$

Calculons les arcs parcourus pendant des intervalles de temps θ , égaux et successifs, on a :

$$s_1 = \frac{1}{2} \alpha'' \cdot r (t + \theta)^2 = \frac{1}{2} \alpha'' \cdot r t^2 + \alpha'' \cdot r \cdot t \cdot \theta + \frac{1}{2} \alpha'' \cdot r \cdot \theta^2$$

$$s_2 = \frac{1}{2} \alpha'' \cdot r (t + 2\theta)^2 = \frac{1}{2} \alpha'' \cdot r \cdot t^2 + 2\alpha'' \cdot r \cdot t \cdot \theta + \frac{1}{2} \alpha'' \cdot r \cdot \theta^2$$

$$s_3 = \frac{1}{2} \alpha'' \cdot r (t + 3\theta)^2 = \frac{1}{2} \alpha'' \cdot r \cdot t^2 + 3\alpha'' \cdot r \cdot t \theta + \frac{9}{2} \alpha'' \cdot r \cdot \theta^2$$

d'où l'on tire :

$$S_1 = s_1 - s = \alpha'' \cdot r \cdot t \cdot \theta + \frac{1}{2} \alpha'' \cdot r \cdot \theta^2$$

$$S_2 = s_2 - s_1 = \alpha'' \cdot r \cdot t \cdot \theta + \frac{3}{2} \alpha'' \cdot r \cdot \theta^2$$

$$S_3 = s_3 - s_2 = \alpha'' \cdot r \cdot t \cdot \theta + \frac{5}{2} \alpha'' \cdot r \cdot \theta^2$$

On voit bien que les espaces $S_1, S_2, S_3 \dots$ forment une progression arithmétique de raison ρ , égale à :

$$\rho = \alpha'' \cdot r \cdot \theta^2$$

3) Les forces de freinage donnent au disque, un mouvement uniformément décéléré avec :

$$\alpha'' = \frac{\omega_0}{t} = \frac{10.2\pi}{5.60} = 0,21 \text{ rad/s}^2 \text{ (ou aussi } \frac{\pi}{15} \text{ rad/s}^2)$$

Avant l'arrêt, il parcourra un angle α_1 égal à :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \alpha'' t^2 + \omega_0 t = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{15} (300)^2 + (20\pi \cdot 300) = 9000 \pi \text{ rad.}$$

Le nombre de tours correspondant sera égal à :

$$N = \frac{\alpha_1}{2\pi} = \underline{\underline{4500 \text{ tours}}}$$

Le moment du couple de freinage est égal à :

$$M = J \cdot \alpha'' = \frac{1}{2} M \cdot r^2 \cdot \alpha''$$

$$M = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{\pi}{15} = \underline{\underline{10^{-4} \text{ N.m}}}$$



Ex. - 7* :

Deux disques homogènes de rayon R_1 et R_2 et de masses m_1 et m_2 sont soudés l'un à l'autre de telle sorte que leurs axes de rotation se confondent. On enroule autour d'eux, deux fils inextensibles et de masse négligeable de telle façon que quand f_1 s'enroule, f_2 se déroule et vice-versa.

On abandonne le système à lui-même. Trouver les chemins parcourus par M_1 et M_2 au bout de 1 seconde.

A.N. : $R_1 = 5\text{cm} ; R_2 = 10\text{cm} ; M_1 = M_2 = 200\text{g} ; m_1 = 100\text{g}$
 $m_2 = 200\text{g} ; g = 10 \text{ m/s}^2$

SOLUTION :

Calculons tout d'abord l'accélération angulaire commune aux deux disques.

D'après la relation fondamentale de la dynamique appliquée à un corps en rotation autour de son axe, on a :

$$M = J \cdot \alpha'' \quad (1)$$

avec M : Moment des forces appliquées au système des deux disques.

Dans le sens choisi, on peut écrire :

$$M = R_2 T_2 - T_1 R_1$$

avec :

$$P_2 - T_2 = M_2 \gamma_2 \text{ d'où } T_2 = M_2 (g - \gamma_2)$$

$$T_1 - P_1 = M_1 \gamma_1 \text{ d'où } T_1 = M_1 (g + \gamma_1)$$

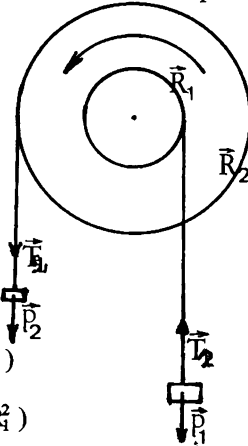
On sait aussi que :

$$\gamma_1 = \alpha'' \cdot R_1 \text{ et } \gamma_2 = \alpha'' \cdot R_2$$

Donc :

$$M = R_2 M_2 (g - \alpha'' R_2) - M_1 R_1 (g + \alpha'' R_1)$$

$$M = g (R_2 M_2 - R_1 M_1) - \alpha'' (M_2 R_2^2 + M_1 R_1^2)$$



J, le moment d'inertie du système formé par les deux disques, est égal à :

$$J = \frac{1}{2} (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)$$

L'équation (1) s'écrira :

$$g (R_2 M_2 - R_1 M_1) - \alpha'' (M_2 R_2^2 + M_1 R_1^2) = \frac{1}{2} (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \alpha''$$

d'où :

$$\alpha'' = \frac{g(R_2 M_2 - R_1 M_1)}{(M_1 R_1^2 + M_2 R_2^2) + \frac{1}{2}(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)}$$

$$\alpha'' = \frac{10(0,2 \cdot 10^{-1} - 5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,2)}{0,2(25 \cdot 10^{-4} + 10^{-2}) + 0,5(0,1 \cdot 25 \cdot 10^{-4} + 0,2 \cdot 10^{-2})}$$

$$\alpha'' = \frac{0,1}{(2,5 + 1,125) 10^{-3}} = 27,6 \text{ rad/s}^2$$

L'accélération linéaire de M_1 sera :

$$\gamma_1 = \alpha'' \cdot R_1 = 27,6 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 1,38 \text{ m/s}^2$$

d'où la distance parcourue par M_1 en 1 seconde :

$$x_1 = \frac{1}{2} \gamma_1 t^2 = \frac{1,38}{2} = \underline{\underline{0,69 \text{ m}}}$$

La masse M_2 aura une accélération γ_2 telle que :

$$\gamma_2 = \alpha'' R_2 = 2,76 \text{ m/s}^2$$

Elle parcourra une distance :

$$x_2 = \frac{1}{2} \gamma_2 t^2 = \frac{2,76}{2} = \underline{\underline{1,38 \text{ m}}}$$



Ex. - 8 - :

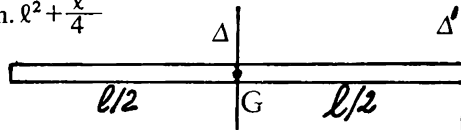
Considérons une barre parallélépipédique de longueur ℓ et de masse M . Si son moment d'inertie par rapport à un axe Δ , perpendiculaire à la plus grande face et passant par son centre de gravité, est: $J_O = \frac{1}{12} m. \ell^2$. Trouver son moment d'inertie par rapport à un axe Δ' passant par une de ses extrémités.

SOLUTION :

D'après le théorème de HUYGHENS, on peut écrire :

$$J = J_O + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m. \ell^2 + \frac{\ell^2}{4}$$

$$J = \frac{1}{3} m. \ell^2$$



Remarque : Ici ℓ représente la longueur de toute la barre.



Ex. - 9* :

1) Calculer en unités SI, le moment d'inertie d'un cylindre plein en platine de rayon $R=2\text{cm}$, de hauteur $h=2\text{cm}$ et de masse volumique $\rho = 21,5\text{g/cm}^3$.

2) Le cylindre précédent est suspendu à un fil métallique vertical, de longueur 1m , dirigé suivant l'axe du cylindre. L'extrémité supérieure du fil est attachée à un point fixe, laissant le fil parfaitement vertical ; on fait tourner le cylindre autour de son axe d'un angle α à partir de sa position de repos et on l'abandonne à lui-même. Il effectue des oscillations de torsion dont la période $T=2\text{s}$. Calculer la constante de torsion C du fil.

3) Quelle est la vitesse angulaire du cylindre quand il passe par sa position d'équilibre au cours d'une oscillation d'amplitude 1 radian ?

4) Le diamètre du fil de suspension est $d=0,6 \text{ mm}$. Sa constante de torsion C satisfait à la relation $C=K(d^4/\ell)$; ℓ désignant la longueur du fil et

K un coefficient caractéristique du métal qui le constitue. Calculer K en unités SI.

SOLUTION :

1) Le moment d'inertie d'un cylindre est égal à :

$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

On a :

$$m = V \cdot \rho = \pi R^2 h \rho$$

$$m = \pi \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 21,5 \cdot 10^3 = 0,540 \text{ Kg}$$

$$\text{donc: } J = 0,5 \cdot 0,540 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = \underline{\underline{0,108 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2}}$$

2) Le cylindre sera animé d'un mouvement sinusoïdal de rotation, de période :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$$

d'où la constante de torsion du fil :

$$C = \frac{4\pi^2 J}{T^2}$$

$$C = \frac{4\pi^2 \cdot 0,108 \cdot 10^{-3}}{4} = \underline{\underline{0,107 \cdot 10^{-2} \text{ m.N/rad.}}}$$

3) L'équation horaire de ce mouvement est :

$$\alpha = \alpha_m \cdot \sin \omega t \quad (\phi = 0)$$

$$\alpha' = \omega \alpha_m \cdot \cos \omega t$$

Au passage par la position d'équilibre, on a :

$$\alpha = 0 \rightarrow \sin \omega t = 0 \rightarrow t = 0 \rightarrow \cos \omega t = 1$$

$$\alpha' = \frac{2\pi}{T} \cdot \alpha_m = \pi \text{ rad/s}$$

$$4) K = \frac{C \cdot \ell}{d^4} = \frac{0,107 \cdot 10^{-2} \cdot 1}{1296 \cdot 10^{-16}} = 8,25 \cdot 10^9 \text{ N/rad.m}^2$$



Ex. - 10* :

Un barreau homogène BD long de 20cm peut osciller horizontalement par la torsion d'un fil vertical AO fixé en A et dont l'axe passe par le centre O du barreau ; la durée de 10 oscillations est de 100 secondes. On surcharge le barreau à l'aide de deux petites masses m et m' de 6,4g

chacune, placées en B et D ; la durée de 10 oscillations devient 105 secondes. Calculer :

- 1) Le moment d'inertie J du barreau par rapport à l'axe AO et la constante de torsion C du fil.
- 2) La vitesse angulaire du barreau (sans les surcharges) quand il passe à sa position d'équilibre au cours d'oscillations d'amplitude égale à 1 radian.

SOLUTION :

- 1) Appelons T la période du barreau sans les masses :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$$

Lorsqu'on place les masses m , la période T' du système barreau-masses et son moment d'inertie J' sont reliés par la même formule :

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{J'}{C}}$$

En divisant membre à membre ces deux expressions :

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{J}{J'}$$

$$\text{or : } J' = J + 2m (\ell/2)^2 = J + 12,8 \cdot 10^{-5}$$

Donc on a :

$$J = \frac{-12,8 \cdot 10^{-5} \cdot T^2}{T^2 - T'^2} = \frac{-12,8 \cdot 10^{-5} \cdot 10^2}{100 - 110,25} = 1,248 \cdot 10^{-3} \text{ Kg.m}^2$$

La constante de torsion C du fil sera :

$$C = \frac{4\pi^2 J}{T^2} = \underline{\underline{49,269 \cdot 10^{-5} \text{ m.N/rad}}}$$

- 2) Le mouvement du barreau est un mouvement sinusoïdal de rotation.
Son équation horaire est :

$$\alpha = \alpha_m \cdot \sin(\omega t)$$

et sa vitesse :

$$\alpha' = \omega \cdot \alpha_m \cdot \cos(\omega t)$$

Au passage à l'équilibre, on a :

$$\alpha' = \frac{2\pi}{T} \cdot \alpha_m = \frac{\pi}{5} \text{ rad/s}$$



Ex. - 11* :

Aux deux extrémités d'un fil de masse négligeable passant sur la gorge d'une poulie mobile autour d'un axe horizontal, sont accrochées deux masses $M = 637 \text{ g}$ et $m = 343 \text{ g}$.

- 1) En négligeant la masse de la poulie, calculer :
 - a) - l'accélération que prend le système abandonné à lui-même.
 - b) - la tension du fil.
- 2) En fait la poulie a un moment d'inertie : $J = 1,96 \cdot 10^{-3} \text{ Kg.m}^2$, son rayon $r = 10 \text{ cm}$ et toute la masse est supposée répartie à la même distance de l'axe. Calculer :
 - a) - La nouvelle valeur de l'accélération.
 - b) - Les tensions des deux brins de fil ; les comparer.
- 3) La masse m se déplace suivant la ligne de plus grande pente d'un plan parallèle à l'axe de la poulie et incliné sur le plan horizontal de 30° .
 - a) - Quelles valeurs doit-on donner aux deux masses M et m , leur somme restant la même, pour que l'accélération prenne la même valeur qu'au premierement ? On néglige la masse de la poulie.
 - b) - Quelle est la longueur parcourue au bout de 2 secondes, par la masse m , sur le plan incliné ? (on précise que la masse m part du repos, au temps zéro et que le plan incliné est suffisamment long pour que, au bout des 2 secondes, elles ne viennent heurter la poulie).
 - c) - Le fil est coupé au bout de ces 2 secondes. Combien de temps, à partir de l'origine des temps, la masse m mettra-t-elle pour repasser par sa position de départ ? On négligera les frottements et l'on prendra dans tout le problème $g = 9,8 \text{ u.SI}$.

SOLUTION :

- 1) a - La relation fondamentale de la dynamique, appliquée aux deux masses M et m , nous donne, si la masse de la poulie est négligeable :

$$P - p = (M + m)\gamma_1 = g(M - m)$$

d'où :

$$\gamma_1 = g \frac{M - m}{M + m} = 9,8 \frac{0,637 - 0,343}{0,637 + 0,343} = 9,8 \frac{0,294}{0,98} = \underline{\underline{2,94 \text{ m/s}^2}}$$

b) la tension du fil peut se calculer comme suit :

$$P - T = M\gamma$$

$$T = M(g - \gamma) = 0,637 (9,8 - 2,94)$$

$$T = \underline{\underline{4,37 \text{ N}}}$$

2) - a) Dans le cas où la masse de la poulie n'est pas négligeable, on peut écrire :

$$r(T'_1 - T'_2) = J \cdot \alpha'' = J \frac{\gamma_2}{r} \quad (1)$$

$$\text{avec : } T'_1 = M(g - \gamma_2)$$

$$T'_2 = m(g + \gamma_2)$$

Ces trois expressions nous donnent :

$$\gamma_2 = g \frac{M - m}{M + m + \frac{J}{r^2}} = 9,8 \frac{0,637 - 0,343}{0,637 + 0,343 + \frac{1,96 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}}}$$

$$\gamma_2 = \frac{9,8 \cdot 0,294}{0,637 + 0,343 + 0,196} = \frac{2,8812}{1,176}$$

$$\gamma_2 = \underline{\underline{2,45 \text{ m/s}^2}}$$

b) Calcul des tensions :

La masse M permet d'écrire : $P - T_1 = M\gamma_2$

donc : $T_1 = M(g - \gamma_2)$

$$T_1 = 0,637(9,8 - 2,45) = \underline{\underline{4,68 \text{ N}}}$$

La masse m permet d'écrire :

$$T_2 - p = m \cdot \gamma_2$$

donc : $T_2 = m(g + \gamma_2)$

$$T_2 = 0,343(9,8 + 2,45) = \underline{\underline{4,20 \text{ N}}}$$

En guise de vérification et pour comparer les deux tensions, on sait que leur différence doit vérifier l'expression (1).

$$T_1 - T_2 = J \frac{\gamma_2}{r}$$

$$4,68 - 4,20 = 0,48 = \frac{1,96 \cdot 10^{-3} \cdot 2,45}{10^{-2}}$$

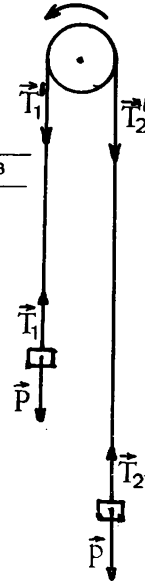
3) - a) En décomposant le poids p en deux composantes p' et p'', on a :

$|p''| = |R|$ (réaction du plan incliné)

$$p' = mg \sin \alpha$$

Et l'accélération du système M et m s'écrit ; si on néglige la masse de la poulie :

$$\gamma_1 = g \frac{M - m \cdot \sin \alpha}{M + m} \quad (2)$$



On a aussi :

$$M + m = 0,637 + 0,343 = 0,98$$

$$\text{d'où } M = 0,98 - m \quad (3)$$

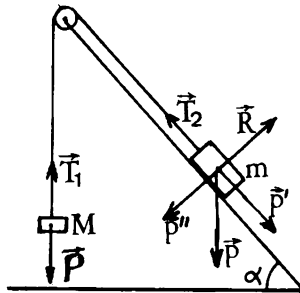
En remplaçant dans (2), M donné par (3), on a :

$$\gamma_1 = g \frac{0,98 - m - m \cdot \sin \alpha}{0,98}$$

Expression qui nous donne pour m :

$$m = \frac{9,80 - \gamma_1}{10(1 + \sin \alpha)} = \frac{6,86}{15} = \underline{\underline{0,457 \text{ Kg}}}$$

$$\text{et } M = 0,98 - 0,457 = \underline{\underline{0,523 \text{ Kg}}}$$



- b) Le mouvement des masses est un mouvement uniformément varié d'équation horaire :

$$x = \frac{1}{2} \gamma_1 t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,94 \cdot 4 = \underline{\underline{5,88 \text{ m}}}$$

- c) Le mouvement est toujours accéléré mais son accélération est égale à :

$$\gamma_3 = -g \cdot \sin \alpha = -4,9 \text{ m/s}^2$$

La vitesse de m, au moment où le fil est coupé est égale à :

$$v^2 = 2\gamma_1 x = 2 \cdot 2,94 \cdot 5,88$$

$$v = 5,88 \text{ m/s}$$

Si on prend comme origine des dates pour ce deuxième mouvement, l'instant où le fil se coupe, on a comme équation horaire :

$$x_2 = \frac{1}{2} \gamma_3 t^2 + vt + 5,88$$

La masse m va continuer sa montée sur le plan incliné, annuler sa vitesse et redescendre vers l'origine. La solution positive de l'équation :

$$-\frac{1}{2} \cdot 4,9 t^2 + 5,88 t + 5,88 = 0$$

correspondra au temps que mettra m à revenir à son point de départ, après la coupure du fil.

$$t' = 3,25 \text{ s}$$

Cela veut dire qu'elle mettra $3,25 + 2 = 5,25$ s pour revenir à son point de départ, à partir de l'origine des temps.



Ex. - 12 - :

Considérons un cylindre C de masse M et une sphère de masse m, reliés par une tige rigide de masse négligeable. Déterminer le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à un axe perpendiculaire à la tige.

SOLUTION :

Le moment d'inertie de la sphère seule par rapport à Δ ; d'après le théorème d'HUYGHENS, s'écrit (voir figure) :

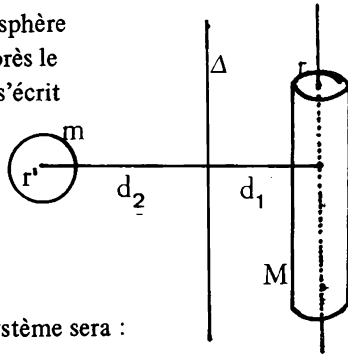
$$J' = \frac{2}{5} m \cdot r'^2 + m \cdot d_2^2$$

Celui du cylindre :

$$J = \frac{1}{2} M \cdot r^2 + M \cdot d_1^2$$

Le moment d'inertie du système sera :

$$J_O = J + J'$$



Ex. - 13 - :

On lance un disque plein à la vitesse de 3000 tours par minute et on l'abandonne à lui-même. On observe alors que sous l'action des divers frottements, il finit par s'arrêter au bout de 5 minutes 14 secondes. La masse de ce disque est 1 Kg et son rayon 20cm. Il tourne autour d'un axe perpendiculaire à son plan et passant par son centre de gravité.

1) Calculer la valeur du couple équivalent aux divers frottements qui ont arrêté le disque.

2) A quelle force d'inertie était soumis un point pris sur le bord externe du disque lorsque celui-ci tournait à 3000 tours par minute ? On prendra pour masse du point 1 gramme.

SOLUTION :

1) La relation fondamentale de la dynamique appliquée au disque en rotation : $M = J \cdot \alpha''$

où α'' est l'accélération angulaire, égale à :

$$\alpha'' = \frac{\omega_0}{t} = \frac{3000 \cdot 2 \cdot \pi}{60 \cdot 314} = 1 \text{ rad/s}^2$$

$J = \frac{1}{2} mr^2$, le moment d'inertie :

$$J = \frac{1}{2} \cdot 1.4 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Kg.m}^2$$

Ainsi : $M = 2 \cdot 10^{-2} \text{ N.m}$

2) La force centrifuge ou force d'inertie à laquelle est soumis un point sur le bord externe du disque, est égale à :

$$F_c = m\omega^2 r = 10^{-3} \cdot 1.2 \cdot 10^{-1} = \underline{\underline{2 \cdot 10^{-4} \text{ N}}}$$



Chapitre huitième

THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

FORMULAIRE

Mouvement Rectiligne :

Définition : $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$

Théorème : La variation de l'énergie cinétique est égale au travail des forces extérieures et intérieures :

$$\Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = W = F.d.$$

Mouvement Rotationnel

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

$$\Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = M \cdot \alpha \cdot r$$

L'accélération dans une machine d'atwood dont la masse de la poulie n'est pas négligeable, est égale à :

$$\gamma = g \frac{m}{2M + m + J/r^2}$$

Où J = Moment d'inertie en Kg - m²

r = Son rayon en m.



Ex. - 1 - :

Calculer l'énergie d'un camion de masse 2,5 tonnes et dont la vitesse est 108 Km/heure.

SOLUTION :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m.v^2 \\ &= \frac{1}{2} . 2,5 . 10^3 . (30)^2 \\ E_c &= \underline{\underline{1.125.10^3 \text{ J}}} \end{aligned}$$



Ex. - 2 - :

Quelle est l'énergie cinétique d'un disque homogène de masse 100 Kg et de rayon 1 m, tournant autour de son axe avec une vitesse angulaire de 100 tours/minute.

SOLUTION :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} J . \omega^2 \\ \text{avec } J &= \frac{1}{2} m . R^2 = 50 \text{ Kg.m}^2 \\ \omega &= \frac{100.2 \pi}{60} = \frac{10}{3} \pi \text{ rad/s} \\ E_c &= \frac{1}{2} . 50 . \left(\frac{10}{3} \pi\right)^2 = \underline{\underline{2.741,5 \text{ J}}} \end{aligned}$$



Ex. - 3 - :

Un tonneau cylindrique de masse 10 Kg roule sans glisser à la vitesse de 7,2 Km/h. Quelle est son énergie cinétique ?

SOLUTION :

L'énergie cinétique dans ce cas s'écrit (la rotation et le mouvement linéaire) :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m.v^2 + \frac{1}{2} J . \omega^2 \\ \text{avec } J &= \frac{1}{2} m . R^2 \text{ et } \omega^2 = \frac{v^2}{R^2} \\ E_c &= m.v^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} m.v^2 \\ E_c &= \underline{\underline{30 \text{ J}}} \end{aligned}$$

• Ex. - 4 - :

Quelle est l'énergie cinétique d'une boule de neige de 50 Kg, qui roule sans glisser à la vitesse de 54 Km/h ?

SOLUTION :

$$E_c = \frac{1}{2} J. \omega^2 + \frac{1}{2} m.v^2$$

$$\text{avec } J = \frac{2}{5} m.R^2 \quad \text{et} \quad \omega^2 = \frac{v^2}{R^2}$$

$$E_c = m.v^2 \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \right) + \frac{1}{2} \right] = \frac{7}{10} m.v^2$$

$$= \frac{7}{10} \cdot 50 \cdot (15)^2 = \underline{\underline{7.875 \text{ J}}}$$



• Ex. - 5 - :

Un cerceau roule sans glisser à la vitesse de 18 Km/h. Quelle est son énergie cinétique si sa masse est égale à 2 Kg ?

SOLUTION :

$$E_c = \frac{1}{2} J. \omega^2 + \frac{1}{2} m.v^2$$

$$\text{avec } J = m.R^2 \quad \text{et} \quad \omega^2 = \frac{v^2}{R^2}$$

$$\text{d'où } E_c = m.v^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = m.v^2$$

$$E_c = 2.25 = \underline{\underline{50 \text{ J}}}$$



Ex. - 6 - :

Un camion pesant 2 tonnes part du sommet d'une pente à 10 pour cent, moteur arrêté et freins desserrés.

1) Trouver, en négligeant toutes les forces de frottement, sa vitesse quand il arrivera au bas de la pente, sachant qu'il a parcouru 200 m.

2) En réalité, sa vitesse au bas de la pente est égale seulement à 54 Km/h. En déduire l'intensité de la résultante des forces de frottement.

3) Au bas de la pente, le camion roule sur une route horizontale ; trouver la distance qu'il parcourra avant de s'arrêter, si les forces de frottement sont les mêmes que celles du N°2.

SOLUTION :

1) Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$\Delta E_c = W$, où ΔE_c est la variation de l'énergie cinétique et W , le travail des forces extérieures.

L'énergie cinétique au départ est nulle ($v = 0$).

Au bas de la pente, elle est égale à :

$$E_{c_2} = \Delta E_c = \frac{1}{2} mv^2$$

d'autre part, la force motrice est égale à :

$$F = P \cdot \sin \alpha = \frac{mg}{10}$$

$$W = P \cdot \sin \alpha \cdot d$$

Donc :

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{mg}{10} \cdot 200$$

$$v = 20 \text{ m/s} = \underline{\underline{72 \text{ Km/h}}}$$

2) La vitesse de 72 Km/h est, si l'on peut dire, théorique. (Nous avons négligé les forces de frottement). L'énergie cinétique qui lui correspond, est égale à :

$$E_{c_1} = \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 400 = 4 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Dans la réalité, la vitesse est égale à : 54 Km/h = 15 m/s et l'énergie cinétique :

$$E_{c_2} = \frac{1}{2} mv_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 225 = 2,25 \cdot 10^5 \text{ J}$$

La différence entre les deux énergies (perte) correspond au travail résistant des forces de frottement F_R . On peut donc écrire :

$$E_{c_1} - E_{c_2} = F_R \cdot d$$

$$\text{d'où : } F_R = \frac{E_{c_1} - E_{c_2}}{d} = \frac{4 \cdot 10^5 - 2,25 \cdot 10^5}{200} = \underline{\underline{875 \text{ N}}}$$

3) Sur la route horizontale, le camion est soumis aux forces de frottement seulement. Le théorème de l'énergie cinétique nous donne :

$$E_{c_2} = F_R \cdot d_2 = \frac{1}{2} mv_2^2$$

d'où :

$$d_2 = \frac{2,25 \cdot 10^5}{875} = \underline{\underline{257 \text{ m}}}$$



Ex. - 7 - :

On lance vers le haut, sur un plan incliné de pente 20 pour cent, un chariot à la vitesse de 2m/s.

1) Quelle serait la distance parcourue si on négligeait les forces de frottement ?

2) Que deviendrait cette distance si les forces de frottement étaient égales au dixième du poids ? ($g = 10\text{m/s}^2$) :

SOLUTION :

1) Le théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire :

$$\Delta E_c = W$$

Où la variation de l'énergie cinétique $\Delta E_c = \frac{1}{2} mv^2$.

La composante du poids parallèle au plan, effectuera un travail $W = mg \cdot \sin \alpha \cdot d$.

Ainsi, on peut écrire :

$$\frac{1}{2} mv^2 = mg \cdot \sin \alpha \cdot d$$

d'où :

$$d = \frac{v^2}{2g \cdot \sin \alpha} = \frac{4}{2 \cdot 10 \cdot 0,2} = \underline{\underline{1 \text{ m}}}$$

2) Si les forces de frottement sont prises en considération on aura :

$$\frac{1}{2} mv^2 = d_2 \left(mg \cdot \sin \alpha + \frac{mg}{10} \right)$$

$$d_2 = \frac{v^2}{2(g \cdot \sin \alpha + \frac{g}{10})} = \frac{4}{2(2 + 1)} = \underline{\underline{0,66 \text{ m}}}$$

Ex. - 8 - :



Considérons un cylindre homogène de masse 200 Kg et de rayon 1 m.
On lui communique une vitesse de 120 tours/minute.

1) Calculer le travail fourni ($\pi^2 = 10$).

2) Ce cylindre enrobé de caoutchouc est rapproché d'un deuxième cylindre lui aussi enrobé de caoutchouc. Les deux cylindres dont les axes sont parallèles, tournent ensemble sans glisser. Au bout d'un certain temps, on les sépare. La vitesse du premier cylindre devient 60 tours/

minute, quant à celle du second, 90 tours/minute. Trouver le moment d'inertie du second cylindre.

SOLUTION :

1) Le théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire :

$$W = \frac{1}{2} J_1 \omega^2$$

$$\text{Avec } J_1 = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 1 = 100 \text{ Kg.m}^2$$

$$\omega = \frac{120 \cdot 2\pi}{60} = 4\pi \text{ rad.}$$

d'où :

$$W = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 16\pi^2 = \underline{\underline{8 \cdot 10^3 \text{ J}}}$$

2) Le premier cylindre ayant accumulé de l'énergie, va en perdre une partie au profit du second. L'énergie transmise est égale à :

$$\Delta E_{c1} = E_{c1} - E'_{c1} = 8 \cdot 10^3 - \left(\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 4\pi^2 \right) = \underline{\underline{4 \cdot 10^3 \text{ J}}}$$

Cette énergie est égale aussi à $E'_{c2} = \frac{1}{2} J_2 \omega_2'^2$

$$J_2 = \frac{2E'_{c2}}{\omega_2'^2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^3}{9 \cdot \pi^2} = \underline{\underline{88,88 \text{ Kg.m}^2}}$$



Ex. - 9 - :

Un volant de 80cm de diamètre, a une masse de 300 Kg qui peut être considérée comme uniformément répartie sur sa circonférence. Il peut tourner dans un plan vertical autour d'un axe horizontal passant par son centre O.

1) Calculer le moment d'inertie du volant par rapport à l'axe de rotation. Quelle est l'énergie cinétique du volant lorsque sa vitesse de rotation est 90 tours par minute ?

2) Ce volant est entraîné par un moteur électrique de puissance P, constante. On admet que 80 pour cent de cette puissance suffisent pour communiquer au volant, initialement au repos, sa vitesse de 90 tours/minute en 12s. Calculer dans ces conditions, la valeur de P.

3) On coupe le moteur et l'on exerce sur le volant un couple résistant constant qui ramène, après 25 tours, sa vitesse de rotation de 90 tours/minute à 30 tours/minute.

a) Calculer la valeur du moment du couple de freinage.

b) Le volant tournant à raison de 30 tours/minute, on supprime le freinage. Quelle est alors la nature du mouvement pris par le volant si l'on néglige les frottements ? Quelle est son équation horaire ? Calculer la vitesse linéaire de chaque point de la circonférence.

4) A la suite d'une rupture, un fragment de métal supposé ponctuel, se détache du volant à l'instant où il passe par la verticale de l'axe et en-dessous à 40cm de l'axe. En quel point du sol ira-t-il tomber, si l'axe de rotation du volant se trouve à 0,60 m du sol ? On prendra $g=9,8\text{m/s}^2$.

SOLUTION :

1) Le moment d'inertie d'une circonférence pesante est :

$$J = mR^2 = 300 \cdot (0,4)^2 = \underline{\underline{48 \text{ Kg.m}^2}}$$

Si ce volant a une vitesse angulaire $\omega = \frac{90 \cdot 2\pi}{60} = 3\pi \text{ rad/s}$; son énergie cinétique sera :

$$E_c = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 9\pi^2 = \underline{\underline{2160 \text{ J}}} \quad (\pi^2 = 10)$$

2) La puissance nécessaire pour acquérir cette énergie en 12 secondes, est égale à :

$$P' = \frac{E_c}{12} = \frac{2160}{12} = 180 \text{ W}$$

La puissance du moteur est donc égale à :

$$P = \frac{P' \cdot 100}{80} = \underline{\underline{225 \text{ W}}}$$

3) a)- Le théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire :

$$E_{c_2} - E_{c_1} = M \cdot \alpha$$

$$\text{où : } E_{c_2} = \frac{1}{2} J \cdot \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot \left(\frac{30 \cdot 2\pi}{60}\right)^2 = 240 \text{ J}$$

$$E_{c_1} = 2160 \text{ J}$$

$$\alpha = 25 \cdot 2\pi = 50 \pi \text{ rad.}$$

Ainsi le moment du couple de freinage est égal à :

$$M = \frac{240 - 2160}{50.3,14} = -12,22 \text{ N.m}$$

b) Si les forces de frottement sont négligeables, le mouvement sera un mouvement circulaire uniforme ; d'équation horaire :

$$\alpha = \omega t$$

$$\text{avec } \omega = \frac{30.2\pi}{60} = \pi \text{ rad/s}$$

$$\alpha = \pi.t$$

La vitesse linéaire de chaque point de la circonférence est égale à :

$$v = \omega.r = \pi.0,4 = 1,25 \text{ m/s}$$

4) Le fragment de métal ainsi détaché va être animé d'un mouvement que l'on peut décomposer en deux :

Suivant l'axe x, un mouvement uniforme d'équation :

$$x = vt = 1,25.t$$

Suivant l'axe z, un mouvement uniformément varié, d'équation horaire (chute libre) :

$$z = \frac{1}{2}gt^2$$

En éliminant t entre les deux équations, on peut tirer l'équation de la trajectoire du fragment :

$$z = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v^2}$$

Cette trajectoire est une parabole en posant $z = (0,6 - 0,4) = 0,2 \text{ m}$, on tire x_m , abscisse du point où le fragment tombe :

$$x_m = \sqrt{\frac{0,4 \cdot (1,25)^2}{10}} = 0,25 \text{ m}$$



Ex. - 10 - :

1) Un cycliste se déplace sur une route horizontale avec une vitesse constante de 18 Km/h. Les forces résistantes qui s'opposent au mouvement ont une intensité constante de 5 N. Quelle puissance le cycliste fournit-il ?

2) A la même vitesse, ce cycliste aborde un virage dont le rayon est de 20 m. Le cycliste doit alors s'incliner. Expliquer pourquoi et calculer l'angle d'inclination.

3) Les forces de résistance restant les mêmes que précédemment, le cycliste aborde une pente de 1 pour cent où il maintient la même vitesse. La masse de l'ensemble cycliste-bicyclette étant de 90 Kg, quelle puissance dépense le cycliste ?

4) Après avoir gravi la côte, le cycliste se trouve à nouveau sur une route rectiligne horizontale avec la même vitesse que précédemment. Il cesse alors de pédaler. Quelle distance parcourt-il jusqu'à l'arrêt, les forces résistantes restant inchangées. Quelle est la durée de ce dernier mouvement ? (On prendra $g = 10 \text{ m/s}^2$).

SOLUTION :

$$1) P = F.v = 5 \cdot 5 = 25 \text{ W}$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{r.g} = \frac{25}{20 \cdot 10} = 0,125$$

$$\alpha = \underline{\underline{7^\circ 7'}}$$

3) La force motrice est :

$$F_2 = 5 + Mg \sin \alpha = 5 + (90 \cdot 10 \cdot 0,01) = 14 \text{ N}$$

$$P_2 = F_2 \cdot v = 14 \cdot 5 = 70 \text{ W}$$

4) Le théorème de l'énergie cinétique nous donne :

$$\frac{1}{2} mv^2 = F.d$$

$$d = \frac{0,5 \cdot 90 \cdot 25}{5} = \underline{\underline{225 \text{ m}}}$$

Ce mouvement s'est fait avec une décélération telle que :

$$\gamma = -\frac{F}{M} = \frac{-5}{90} \text{ m/s}^2$$

$$t = \frac{-V_0}{\gamma} = \frac{5 \cdot 90}{5} = \underline{\underline{90 \text{ s}}}$$



Chapitre neuvième

LE PENDULE PESANT

FORMULAIRE

La période d'un pendule pesant, pour de petites oscillations .

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$$

où J : Moment d'inertie

a : Distance de l'axe de rotation au centre d'inertie.

Pour un pendule simple la période est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Le temps de coïncidence θ de deux pendules de périodes voisines :

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{T'} - \frac{1}{T}$$

La variation de la longueur $\Delta\ell$, s'accompagne d'une variation de période telle que :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta\ell}{2\ell}$$

La variation de l'accélération de la pesanteur donne :

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta g}{2g}$$



Ex. - 1 - :

Une horloge réglée par un pendule pesant, bat la seconde en un lieu où $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Quelle est la longueur du pendule simple synchrone de ce pendule pesant ? Cette horloge, transportée en un autre lieu, retarde de 100 s par jour ; quelle est la valeur de g en ce lieu ?

SOLUTION :

On dit qu'un pendule bat la seconde quand sa période est égale à 2 s. Donc, on peut écrire :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \rightarrow \ell = \frac{T_0^2 g}{4\pi^2}$$

$$\text{d'où } \ell = \frac{4 \cdot 9,8}{4\pi^2} = \underline{\underline{0,99 \text{ m}}}$$

On sait que la période d'un pendule est inversement proportionnelle à la racine carrée de g . Quand une horloge retarde, cela veut dire que sa période est devenue plus grande. Dans notre cas, ceci est dû à une diminution de g . On sait aussi que :

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$$

$$\Delta g = -\frac{2g \Delta T}{T} = -\frac{2 \cdot 9,8 \cdot 100}{24 \cdot 3600 \cdot 2} = -0,01$$

donc :

$$g = g_0 + \Delta g = 9,80 - 0,01 = 9,79 \text{ m/s}^2$$

**Ex. - 2 - :**

Un pendule simple de 2 mètres de long oscille en un lieu où le pendule simple qui bat la seconde a juste 1 mètre de long. On demande

- 1) La durée d'oscillation au 1/1000 près.
- 2) L'intervalle des coïncidences de ce pendule de 2 mètres avec un autre pendule de 1,96 m, placé près du premier.

SOLUTION :

- 1) Le pendule de 1 m permet d'écrire :

$$2 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}}$$

Le pendule de 2 m permet aussi d'écrire :

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{g}}$$

En divisant membre à membre, on a :

$$\frac{4}{T_2^2} = \frac{1}{2}$$

$$T_2^2 = 8 \rightarrow T_2 = \underline{\underline{2,828 \text{ s}}}$$

2) L'intervalle des coïncidences t a pour expression :

$$t = \frac{T_2 \cdot T_1}{T_2 - T_1}$$

où T_2 est la période du pendule à 2 m et T_1 celle du pendule à 1,96 m.

En remplaçant T_1 et T_2 par leur valeur et en simplifiant, on a :

$$t = \frac{T_2 \cdot \sqrt{\ell_1}}{\sqrt{\ell_2} - \sqrt{\ell_1}} = \frac{2,828 \cdot 1,4}{1,414 - 1,4} = \underline{\underline{102 \text{ s}}}$$



Ex. - 3* :

Soit un disque de masse $M=200\text{g}$ et de rayon $R=10\text{cm}$. Une tige homogène AB de longueur $\ell=60\text{cm}$ et de masse $m'=50\text{g}$ est soudée dans le prolongement d'un rayon OB du disque. L'ensemble disposé verticalement est mobile autour d'un axe horizontal passant par A .

- 1) Quelle est la position du centre de gravité G de l'ensemble.
- 2) On l'écarte de sa position d'équilibre et on le laisse effectuer des petites oscillations.

Déterminer la période T de ces dernières. ($g = 10\text{m/s}^2$).

SOLUTION :

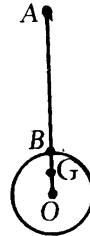
- 1) La distance $a=AG$ vérifie la loi du barycentre qui s'écrit :

$$a(M+m') = m' \frac{\ell}{2} + M(\ell+R)$$

$$a = \underline{\underline{0,62 \text{ m}}}$$

- 2) La période est égale à :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{(M+m')ga}}$$

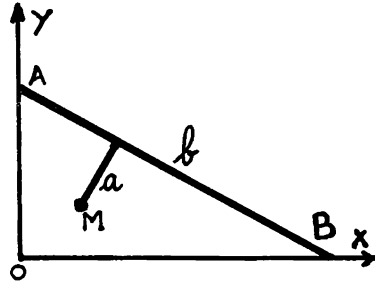


Avec J_A le moment d'inertie du système par rapport à l'axe passant par A :

$$J_A = m' \frac{\ell^2}{12} + M \frac{R^2}{2} + M(\ell+R)^2 \quad \text{d'où :} \quad T = \underline{\underline{1,6 \text{ s}}}$$

Ex. - 4* :

Une masse M , assimilable à un point matériel, maintenue à une distance fixe a d'un axe AB de masse négligeable et de longueur b , oscille autour de cet axe sous l'effet de la pesanteur. AB peut décrire un plan vertical, les points A et B s'appuyant sur deux axes fixes OY vertical OX horizontal de ce plan.



Etablir une relation simple entre la période T du pendule étudié, a , b , et la distance $OB = x$.

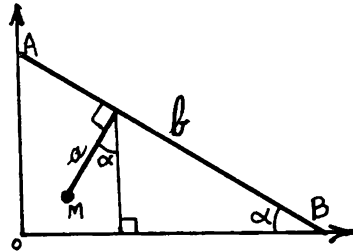
SOLUTION :

On sait que la période, d'un pendule incliné d'un angle par rapport à l'horizontale est égale à :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g \cos \alpha}}$$

Or $\cos \alpha = \frac{x}{b}$ (angles aux côtés perpendiculaires deux à deux) ainsi, on a :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ab}{gx}}$$



—oOo—

Ex. - 5* :

Une tige rigide de masse négligeable, de longueur 60cm peut tourner librement autour d'un axe horizontal passant par son milieu O . Sur cette tige peuvent se déplacer deux masses ponctuelles M et M' identiques, de valeur $M=2g$. On appellera d la distance de M au point O et d' la distance de M' au point O . Dans tout le problème sauf indication contraire, on négligera les frottements. On prendra $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

1) La masse M seule est placée sur la tige à une distance $d=30\text{cm}$. Calculer la période T_0 du pendule simple ainsi constitué.

2) La masse M conservant la position précédente ($d=30\text{cm}$), on place sur la tige la masse M' . Calculer la période T des petites oscillations du système autour de sa position d'équilibre, pour une position donnée de M' . On donnera l'expression de T en fonction de T_0 et du rapport $x=d'/d$ (d' peut être positif ou négatif suivant que M' est du même côté que M par rapport à O ou du côté opposé).

Représenter graphiquement T^2 en fonction de x , en limitant la courbe au déplacement de M' sur la tige.

Quelle est la période minimale du pendule ?

SOLUTION :

$$1) T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,3}{9,81}} = \underline{\underline{1,0987 \text{ s}}}$$

2) La nouvelle période des petites oscillations s'écrit :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{(M+M')g \cdot a}}$$

où a , distance du centre de gravité au point O ; vérifie l'expression :

$$M \cdot d + M' \cdot d' = (M + M') a$$

$$a = \frac{Md + M'd'}{M + M'}$$

J , le moment d'inertie de l'ensemble des deux masses :

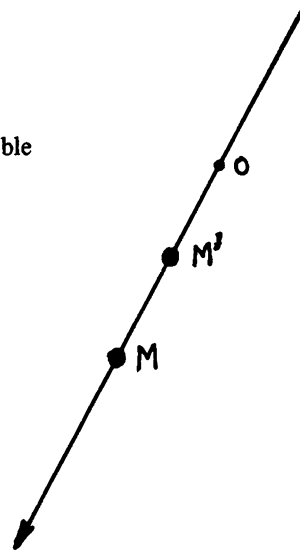
$$J = Md^2 + M'd'^2$$

$$\text{d'où } T = 2\pi\sqrt{\frac{Md^2 + M'd'^2}{g(Md + M'd')}} \quad \text{---}$$

qu'on peut écrire :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d(M + M'd'^2/d^2)}{g(M + M'd'/d)}}$$

$$T = T_0\sqrt{\frac{M + (M'd'^2/d^2)}{M + (M'd'/d)}}$$



Enfin T^2 s'écrit en fonction de $d'/d=x$ (qui varie de $+1$ à -1), et si $M = M'$:

$$y = T^2 = T_0^2 \cdot \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

Cette fonction admet une asymptote verticale quand x tend vers -1 .

La dérivée est égale à :

$$y' = T_0^2 \cdot \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{(2x + 2)^2} \right)$$

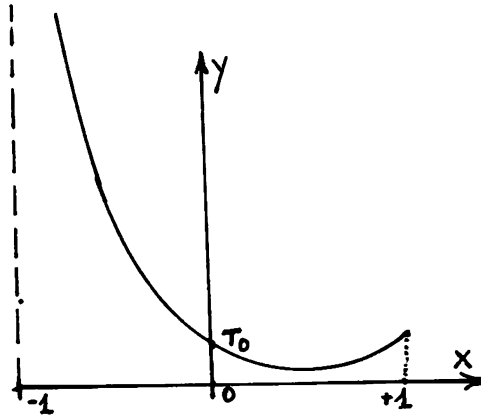
$$y' = 0 \rightarrow x = 0,414 \rightarrow y \text{ est minimale}$$

Ainsi la valeur minimale de T sera :

$$T_m = 1,098\sqrt{\frac{(0,414)^2 + 1}{0,414 + 1}}$$

d'où $T_m = \underline{\underline{0,999 \text{ s}}}$

pour $x = 0 \quad T = T_0$
 $x = 1 \quad T = T_0$



Ex. - 6 - :

Quelle est la période d'un pendule simple de longueur 88,2 cm ?

Quel est le moment d'inertie d'un pendule composé, synchrone du pendule précédent (c'est-à-dire de même période), dont la masse est 800 grammes et dont le centre de gravité se trouve à, $a=95 \text{ cm}$ de l'axe d'oscillation ? $g = 9,80 \text{ m/s}^2$.

SOLUTION :

$$1) T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{88,2 \cdot 10^{-2}}{9,8}} = \underline{\underline{1,884 \text{ s}}}$$

2) Si les deux pendules sont synchrones, on a :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$$

d'où :

$$J = l.m.a = 88,2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,8 \cdot 95 \cdot 10^{-2}$$

$$J = \underline{\underline{0,67 \text{ Kg.m}^2}}$$



Ex. - 7* :

Un pendule simple bat la seconde en un lieu donné, quelle est sa longueur si $g=9,81 \text{ m/s}$.

Ce pendule régularise une horloge. On la transporte en un lieu où l'accélération de la pesanteur est égale à $9,78 \text{ m/s}$.

1) De combien avancera-t-elle ou retardera-t-elle par jour ?

2) De combien faudrait-il allonger ou raccourcir le pendule pour que la marche de l'horloge redevienne exacte ?

SOLUTION :

$$1) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

d'où :

$$\ell = \frac{T^2 g}{2\pi^2} = \frac{4 \cdot 9,81}{4 \cdot \pi^2} = \underline{\underline{0,99 \text{ m}}}$$

2) Quand g décroît, la période du pendule croît et l'horloge retardera. On sait que :

$$\frac{\Delta T}{T} = - \frac{\Delta g}{2g}$$

$$\Delta T = - \frac{T \Delta g}{2g}$$

En multipliant ΔT (variation d'une période) par N , le nombre de périodes par jour, on aura le retard :

$$\begin{aligned} \Delta t = \Delta T \cdot N &= - \frac{T \Delta g}{2g} \cdot \frac{24 \cdot 3600}{T} = \\ &= - \frac{0,03 \cdot 24 \cdot 3600}{2 \times 9,81} = -132 \text{ s} = -2'12'' \end{aligned}$$

Si on veut rattraper ce retard, il faudra allonger le pendule d'une longueur $\Delta \ell$ telle que :

$$\frac{\Delta \ell}{2\ell} = \frac{\Delta g}{2g}$$

$$\Delta \ell = \Delta g \frac{\ell}{g} = 0,03 \frac{0,99}{9,81} = \underline{\underline{3 \text{ mm}}}$$

**Ex. - 8* :**

Un pendule simple de longueur $\ell=0,5 \text{ m}$ et de masse $m=100 \text{ g}$ oscille avec une amplitude angulaire de 90° .

1) Peut-on calculer sa période grâce à la relation $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$. Justifier votre réponse.

2) Calculer la vitesse de la masse pesante et la tension du fil à l'instant

où l'élongation angulaire est 45° . $g = 10 \text{ m/s}^2$.

SOLUTION :

1) On sait que la période d'oscillation, d'un pendule simple quand l'amplitude est faible, est indépendante de cette dernière. Elle a pour expression :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Si α_m , l'amplitude devient importante, la période augmente avec elle ; et peut être calculée à l'aide de :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\alpha_m^2}{16} \right)$$

2) On sait que (question à traiter au prochain chapitre) :

$$\frac{1}{2} m V^2 = mgh$$

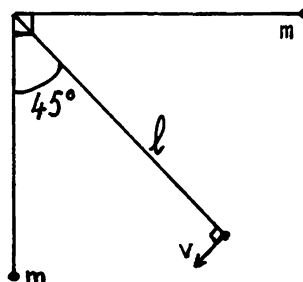
$$V^2 = 2gh = 2g\ell (1 - \cos\alpha)$$

$$\text{d'où : } V^2 = 2 \cdot 10 \cdot 0,5 \cdot (1 - \sqrt{2}/2)$$

$$V = 2,9 \text{ m/s.}$$

La tension du fil T est égale à :

$$T = mg \cos\alpha + mV^2/\ell = 2,38 \text{ N}$$



— oOo —

Ex. - 9 - :

Deux pendules dont les longueurs sont respectivement égales à 90cm et à 160cm passent simultanément devant un repère fixe.

Au bout de combien de temps repasseront-ils simultanément devant le même repère, avec des vitesses de même sens ? ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$).

SOLUTION :

On sait que l'intervalle de temps t nécessaire aux passages simultanés de deux pendules est, en fonction de T et T' , leur période :

$$t = nT' = (n + 1) T \rightarrow \frac{1}{t} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T'}$$

en remplaçant T et T' par leur valeur, on a :

$$\frac{1}{t} = \frac{\sqrt{g}}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\ell}} - \frac{1}{\sqrt{\ell'}} \right)$$

$$\frac{1}{t} = \frac{\sqrt{9,81}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{0,90}} - \frac{1}{\sqrt{1,60}} \right)$$

$$t = \underline{\underline{7,59 \text{ s}}}$$

Ex. - 10* :



1) Un pendule est constitué par une tige métallique OA, de masse négligeable, mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la tige en son extrémité O, et supportant à l'autre extrémité A une masse M supposée ponctuelle. Ce pendule est assimilable à un pendule simple de longueur OA. Il effectue des oscillations de faible amplitude.

Le pendule battant la seconde à 0°C ($T_0 = 2\text{s}$) en un lieu où $g = 9,81 \text{ u.SI}$, calculer la longueur $OA = \ell_0$ à cette température.

2) La température s'élève à 20°C. Quelle variation relative de la période en résulte-t-il, sachant que le coefficient de dilatation linéaire de la tige qui soutient la masse M est $\lambda = 1,85 \cdot 10^{-5}$?

Ce pendule constitue le balancier d'une horloge dont la marche est exacte à 0°C. Cette horloge avance-t-elle ou retarde-t-elle lorsque la température s'élève à 20°C ? De combien par jour ?

3) A la température 20°C, la longueur de la tige du pendule est ℓ . On fixe au milieu de la tige (à la distance $\frac{\ell}{2}$ de l'axe O) une petite masse ponctuelle m. Calculer la période de ce pendule composé, en fonction de ℓ , M, et m. Montrer que la présence de m diminue la période.

Quelle doit être la valeur de m pour que le pendule ainsi modifié batte rigoureusement la seconde à 20°C ? On donne : $M = 0,500 \text{ Kg}$.

N.B. On simplifiera les calculs en tenant compte de ce que m/M est petit par rapport à l'unité.

SOLUTION :

$$1) \text{ On a : } \ell_0 = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{4 \cdot 9,81}{4 \cdot 3,14^2} = \underline{\underline{0,994 \text{ m}}}$$

2) a)- On sait que la variation de la période en fonction de la variation de la température (ΔT) et du coefficient de dilatation linéaire est :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\lambda \cdot \Delta \theta}{2} = \frac{1,85 \cdot 10^{-5} \cdot 20}{2} = \underline{\underline{1,85 \cdot 10^{-4}}}$$

b)- Quand la longueur croît, la période croît aussi. Cela veut dire que l'horloge réglée par un tel pendule va retarder par jour de :

$$\Delta t = 1,85 \cdot 10^{-4} \cdot T \cdot \frac{24 \cdot 3600}{T} = \underline{\underline{15,9 \text{ s}}}$$

3) Le pendule composé ainsi formé a pour période :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{(M+m)ga}}$$

où le moment d'inertie J est égal à :

$$J = (m\ell^2 / 4) + M\ell^2$$

et a, la distance de l'axe de rotation au centre de gravité du système formé par les deux masses M et m, est égale à :

$$a = \frac{M\ell + (m\ell / 2)}{M + m}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g} \frac{M + m/4}{M + m/2}}$$

En négligeant $\frac{m}{M}$ devant l'unité, on a :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g} \left(1 - \frac{m}{8M}\right)}$$

Expression qui nous donne pour m :

$$m = 4M \left(1 - \frac{T^2 g}{4\pi^2 \ell}\right) = 0,74 \text{ g}$$



Chapitre dixième

ENERGIE MECANIQUE

Ex. - 1 - :

Une voiture roulant avec une vitesse de 108 Km/h, heurte un obstacle.

Calculer la hauteur de laquelle devrait tomber cette voiture pour libérer la même quantité d'énergie.

($g = 10$ u. SI)

SOLUTION :

En tombant d'une hauteur h , elle libère une énergie potentielle telle que :

$$E_p = m.g.h$$

Cette énergie devrait être égale à son énergie cinétique qu'elle a libérée contre l'obstacle et qui est :

$$E_c = \frac{1}{2} m.V^2$$

Si on veut que : $E_c = E_p$

on a : $h = \frac{V^2}{2g} = 900/20 = 45$ (environ la hauteur d'un immeuble de 15 étages !)



Ex. - 2 - :

Un marteau-pilon est constitué d'une masse de 300 Kg, couissant sans frottement le long d'une glissière ($g=10m/s^2$).

1) Le marteau est soulevé d'une hauteur de 5m en 3 secondes ; quelle est la puissance moyenne du moteur qui l'entraîne ?

2) Le marteau retombe en chute libre sur un pieu qui pénètre le sol de 5cm. Quelle est la vitesse du marteau en fin de course, juste avant le choc ? Quelle est la force moyenne qu'oppose le sol à la pénétration du pieu ?

3) Quelle est la quantité de calories dégagées entre le pieu et la roche ?

SOLUTION :

1) Le moteur a fourni un travail W en t secondes, sa puissance est :

$$P = W/t$$

Or, W est égal à l'énergie potentielle du marteau-pilon soulevé à 5 m.

$$P = \frac{mgh}{t} = \frac{300 \cdot 10 \cdot 5}{3} = \underline{\underline{5000 \text{ W}}}$$

2) La vitesse du marteau-pilon avant le choc est telle que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \cdot V^2 &= m \cdot g \cdot h \\ V^2 &= 2gh \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } V = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5} = 10 \text{ m/s}$$

L'énergie cinétique ainsi acquise va s'annuler et on peut écrire :

$$\frac{1}{2} m \cdot V^2 = F \cdot d$$

où F la force moyenne opposée par le sol :

$$F = m \cdot V^2 / 2d = 300 \cdot 100 / 2 \cdot 5 \cdot 10^{-2}$$

$$F = \underline{\underline{3 \cdot 10^5 \text{ N}}}$$

3) Cette énergie cinétique acquise par le marteau va se transformer en chaleur et, on a :

$$W = \frac{1}{2} m \cdot V^2 = 150 \cdot 100 = 15 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$Q = \frac{15 \cdot 10^3}{4,18} = \underline{\underline{3588,5 \text{ calories}}}$$



Ex. - 3* :

Un volant est constitué par un cylindre de masse 1 tonne, homogène, de rayon 60 cm. Il est entraîné par un moteur qui développe une puissance constante $P = 10 \text{ KW}$.

1) Le volant étant au repos, combien de temps faut-il au moteur pour le lancer à 600 tours/minute . ($\pi^2 = 10$).

2) Ce volant est couplé à un laminoir. Lorsque la vitesse de 600 tours/minute est atteinte, un lingot arrive dans le laminoir ; 2,4 s après, le lingot sort du laminoir, la vitesse n'est plus que de 576 tours/minute .

a) Calculer le travail nécessaire pour écraser le lingot.

b) Calculer la puissance moyenne développée par l'ensemble moteur-volant, la comparer à la puissance du moteur.

c) Quel temps doit séparer le passage de deux lingots pour que la machine fonctionne cycliquement.

SOLUTION :

1) L'énergie cinétique du volant est égale à :

$$E = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

$$\text{Où } J = \frac{1}{2} M \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 0,36 = 180 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega = (600 \cdot 2\pi)/60 = 20\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega^2 = 4 \cdot 10^3$$

$$E = \frac{180}{2} 4 \cdot 10^3 = 36 \cdot 10^4 \text{ J}$$

D'où le temps nécessaire au moteur pour communiquer cette énergie au volant :

$$t = E/P = 36 \cdot 10^4 / 10^4 = \underline{\underline{36 \text{ s}}}$$

2) a)- La nouvelle énergie cinétique du volant après le passage du lingot :

$$E' = \frac{1}{2} J \omega'^2 = \frac{1}{2} \cdot 180 \cdot 3686,4 = 331\,776 \text{ J}$$

La variation de E est égale au travail nécessaire pour écraser le lingot :

$$\Delta E = W = 36 \cdot 10^4 - 331\,776 = \underline{\underline{28\,224 \text{ J}}}$$

b) La puissance fournie par le volant est :

$$P' = W/t = 28\,224/2,4 = \underline{\underline{11,76 \text{ KW}}}.$$

Puissance supérieure à celle du moteur.

c) Pour que la machine fonctionne cycliquement (dans les mêmes conditions de travail que précédemment), il faut donner le temps au moteur pour fournir au volant la quantité ΔE_c nécessaire à la reprise. D'où :

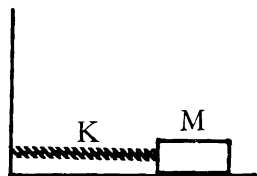
$$t_2 = 28\,224/10^4 = 2,82 \text{ s}$$

Donc les lingots doivent arriver avec une période :

$$T = 2,82 + 2,4 = \underline{\underline{5,22 \text{ s}}}$$



Ex. - 4 - :



Un ressort dont la constante de raideur est $K = 100 \text{ N/m}$, est comprimé de 5 cm entre un mur et une masse $M = 250 \text{ g}$ qu'on tient sur une table. On libère M , calculer le chemin D parcouru par M , si les forces de frottement, constantes et dirigées dans le sens opposé du mouvement, sont égales au $1/10$ du poids de M . ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

SOLUTION :

L'énergie potentielle d'élasticité va se transformer en énergie cinétique communiquée à M . Au bout d'une distance D , M s'arrêtera ; son énergie cinétique, à son tour, se transformera en chaleur grâce aux forces de frottement. On a donc :

$$\frac{1}{2} K.x^2 = \frac{1}{2} m.V^2 = F.D. = (mg/10).D$$

$$\text{d'où : } D = 10.K.x^2/2mg = \underline{\underline{0,5\text{m}}}$$



Ex. - 5 - :

Soit un ressort dont la constante de raideur est 10 N/m .

- 1) Calculer son énergie potentielle si on l'allonge de 5 cm.
- 2) Quel est le travail des forces extérieures nécessaires, pour l'allonger de 5 à 15 cm ?

SOLUTION :

$$1) E = \frac{1}{2} K.x_1^2 = 5.25.10^{-4} = \underline{\underline{125.10^{-4} \text{ J}}}.$$

2) Quand il est allongé de 5 à 15 cm, son énergie est égale à :

$$E' = \frac{1}{2} K.x_2^2 = 5.225.10^{-4} = 1125.10^{-4} \text{ J}$$

Ainsi le travail nécessaire pour l'allonger de 5 à 15 cm est égal à :

$$W = E' - E = \frac{1}{2} K (x_2^2 - x_1^2) = \underline{\underline{0,1 \text{ J}}}$$



Ex. - 6 - :

Quel est le travail fourni pour remonter un réveil, sachant que son remontoir est l'axe d'un ressort en spirale que l'on tourne de 15 tours. La constante de flexion du ressort est $C=2.10^{-2} \text{ m.N/rad}$; ($\pi^2=10$).

SOLUTION :

$$W = \frac{1}{2} C \alpha^2 = \frac{1}{2} 2.10^{-2} (30 \pi)^2 = \underline{\underline{90 \text{ J}}}$$

—oOo—

Ex. - 7* :

Une balle pesant 100g est lancée verticalement de bas en haut, sans rotation, avec une vitesse initiale de 20 m/s. L'accélération de la pesanteur vaut $g=10 \text{ m/s}^2$.

1) Calculer :

- a) La hauteur maximale que peut atteindre la balle,
- b) Le temps qu'elle met pour parvenir à cette hauteur maximale,
- c) L'énergie mécanique de cette balle.

2) Quand la balle retombe sur le sol, elle rebondit instantanément en perdant la moitié de l'énergie qu'elle possédait avec le choc.

- a) Quelle est, en calories, la quantité de chaleur dégagée pendant le choc ? (l'équivalent mécanique de la calorie est 4,18 Joules).
- b) A quelle hauteur la balle peut-elle remonter après le choc ?

3) Sachant que la balle perd ainsi la moitié de son énergie chaque fois qu'elle rebondit, déterminer la suite des valeurs successives de la hauteur maximale atteinte par la balle après chaque rebondissement.

SOLUTION :

1) a) D'après le principe de la conservation de l'énergie, on a :

$$\frac{1}{2} m . V_1^2 = m . g . h_1$$

$$h_1 = V_1^2 / 2g = \frac{400}{2.10} = \underline{\underline{20 \text{ m}}}$$

b) Le temps de montée (et de descente aussi) :

$$t_1 = v_1 / g = \underline{\underline{2 \text{ s}}}$$

c) Son énergie mécanique est égale à :

$$E = \frac{1}{2} m . v_1^2 = m . g . h_1 = 0,05 . 400 = \underline{\underline{20 \text{ J}}}$$

2) a) La quantité de chaleur dégagée lors du choc :

$$E_2 = 10 \text{ J} = \underline{\underline{2,39 \text{ calories}}}$$

b) La balle remontera à :

$$h_2 = E_2/mg = 10 \text{ m} = h_1/2$$

3) Les hauteurs maximales successives sont :

$$\frac{E}{mg} ; \frac{E}{2mg} ; \frac{E}{4mg} ; \frac{E}{8mg} ; \dots$$

$$\text{où : } E = \frac{1}{2} m V_1^2 = \underline{\underline{20 \text{ J}}}$$

on aura donc : 20 ; 10 ; 5 ; 2,5 ; ...

Ex. - 8* :



✓ 1) Un skieur part sans vitesse initiale d'un point A et descend une pente régulière AB de 10 pour cent, longue de 200m. Quelle serait sa vitesse v en B, si tous les frottements étaient négligeables ? ($g=10 \text{ u.SI}$).

✗ 2) Animé de cette vitesse v , le skieur aborde une montée régulière BC de 5 pour cent. En supposant encore les frottements négligeables, quelle distance pourrait-il parcourir sur cette montée en profitant simplement de la vitesse qu'il possédait en B ? Quelle serait la durée de cette montée ?

3) Ecrire l'équation qui permet de calculer le temps t , compté à partir du passage en B, au bout duquel le skieur, dans les mêmes conditions aurait parcouru une distance e sur BC. Discuter cette équation. Application numérique : $e = 144 \text{ m}$.

✗ 4) Les frottements n'étant pas négligeables, le skieur parti de A, possède en réalité, en arrivant en B, une vitesse de 16m/s. Calculer l'énergie qui a été absorbée par les divers frottements au cours de la descente. (masse totale du skieur : 80 Kg).

5) Pour remonter BA, le skieur s'attache par un câble à un remonte-pente. Son mouvement d'abord uniformément accéléré avec une accélération $\gamma=0,5\text{m/s}^2$, devient rapidement uniforme. Calculer la traction exercée par le câble sur le skieur pendant les deux phases de la montée.

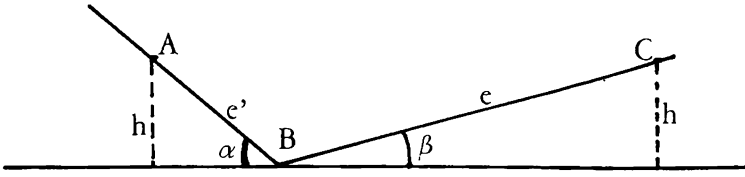
SOLUTION :

1) La loi de la conservation de l'énergie mécanique permet d'écrire :

$$m \cdot g \cdot h = m g e' \sin \alpha = \frac{1}{2} m \cdot V^2$$

$$V^2 = 2 g e' \sin \alpha = 2 \cdot 10 \cdot 200 \cdot 0,1$$

$$v = 20 \text{ m/s} = \underline{\underline{72 \text{ Km/h}}}$$



2) a) On a (si les frottements sont négligeables) :

$$\frac{1}{2} m \cdot V^2 = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot e \cdot \sin \beta = m \cdot g \cdot e' \cdot \sin \alpha$$

$$h = e' \sin \alpha = e \cdot \sin \beta.$$

$$e = 200.0,1/0,05 = \underline{\underline{400 \text{ m}}}$$

b) La durée de la montée jusqu'à l'arrêt :

$$t = -v / -\gamma = -v / -g \cdot \sin \beta$$

$$t = 20 / (10 \cdot 0,05) = \underline{\underline{40 \text{ s}}}$$

3) C'est un mouvement uniformément retardé d'équation :

$$x = \frac{1}{2} \gamma t^2 + V_0 t$$

$$\text{où } \gamma = -g \sin \beta$$

$$V_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot e' \cdot \sin \alpha}$$

si $x = e = 144 \text{ m}$, on a l'équation en t :

$$\frac{1}{2} \gamma t^2 + V_0 t - e = 0$$

Equation du second degré qui admet des solutions quand :

$$V_0^2 - 2 \gamma e \geq 0$$

Physiquement cela veut dire que le skieur arrivera en e si l'énergie cinétique accumulée à la fin de la descente est au moins égale à l'énergie nécessaire pour remonter jusqu'en C . On pourra écrire :

$$V_0^2 - 2 \gamma e = 2g \cdot e' \sin \alpha - 2g \cdot e \cdot \sin \beta \geq 0$$

C'est-à-dire :

$$e' \sin \alpha \geq e \cdot \sin \beta$$

Ainsi, dans notre cas, on aura :

$$\sqrt{\Delta} = 16$$

$$t' = \frac{-20 + 16}{-1} = 4 \text{ s, durée de la montée}$$

La deuxième solution :

$$t'' = \frac{-20 - 16}{-1} = 36s, \text{ correspond au deuxième passage (s'il y en a).}$$

Le skieur est supposé monter jusqu'à 400m et redescendre en C, où il y passera 36s après son départ de B.

4) La diminution de l'énergie cinétique correspond au travail des forces de frottement :

$$W = \Delta E = \frac{1}{2} m (V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2} 80(400 - 256) = \underline{\underline{5760 \text{ J}}}$$

5) Pendant la phase d'accélération, on a :

$$T - P' = m\gamma$$

$$T = m(g \cdot \sin \alpha + \gamma) = 80(10,05 + 0,5) = \underline{\underline{80 \text{ N}}}$$

Quand le mouvement est uniforme, on a :

$$T = P \cdot \sin \alpha = 80 \cdot 10,05 = \underline{\underline{40 \text{ N}}}.$$

Ex. - 9* :



I – Le câble C d'une grue comporte à son extrémité libre un système de fixation destiné à accrocher les matériaux. L'autre extrémité du câble est entraînée par un moteur électrique. On néglige la masse du câble par rapport à la masse m du système de fixation : $m=60 \text{ Kg}$. Les matériaux à monter partent du sol S ; leur masse est $M=300 \text{ Kg}$.

1) Le grutier embraye le moteur et le câble communique à la charge M une vitesse $v=1,5\text{m/s}$ au bout de $1,5 \text{ m}$ de montée. Calculer le module du vecteur accélération.

2) En déduire le module de la tension T du câble pendant cette première phase du mouvement.

3) Après avoir atteint l'altitude de $1,5\text{m}$, la charge continue de s'élever à vitesse constante de $1,5\text{m/s}$. Calculer le module de la nouvelle tension T' du câble.

4) En déduire la puissance P développée par le moteur pendant cette deuxième phase.

5) Donner qualitativement la caractéristique cinématique de la troisième phase.

II – 1) La charge, toujours suspendue au câble, est arrêtée à l'altitude A . Une fausse manoeuvre du grutier entraîne le débrayage du moteur. Le système (câble, crochet, matériau) tombe en chute libre. On convient de prendre A comme origine des hauteurs de chute, z . En utilisant le théo-

rème de l'énergie cinétique, montrer que la vitesse V correspondant à chaque valeur de z a pour expression $V^2 = a.z$, a étant une constante que l'on calculera numériquement. Application numérique : Calculer V pour $z = 20$ m.

2) En réalité le grutier dispose d'un frein de secours dont l'effet est de réduire l'accélération de la chute. En posant $E_m = E_p - E_c$ (E_m = variation d'énergie mécanique ; E_c = variation d'énergie cinétique ; E_p = diminution d'énergie potentielle), montrer que pendant une chute z ,

$E_m = mgz \frac{(k-1)}{k}$ avec $k = \frac{g}{\gamma}$. Application numérique : Calculer E_m pour $k = 2$ et $z = 20$ m.

SOLUTION :

I – 1) L'accélération est égale à :

$$\gamma = \frac{V^2}{2h} = \frac{(1,5)^2}{2 \cdot 1,5} = \underline{\underline{0,75 \text{ m/s}^2}}$$

2) La tension du câble :

$$T_1 - g(M+m) = (M+m) \gamma$$

$$T_1 = (M+m) (g + \gamma)$$

$$= (300 + 60) (10 + 0,75) = \underline{\underline{3870 \text{ N}}}$$

3) Ici la vitesse est constante ($\gamma = 0$), on a :

$$T' = (M+m)g = \underline{\underline{3600 \text{ N}}}$$

4) La puissance du moteur est :

$$P = \frac{W}{t} = \frac{T' h}{t} = T v = 3600 \cdot 1,5 = \underline{\underline{5400 \text{ W}}}$$

5) Le mouvement pendant la troisième partie est un mouvement uniformément retardé, d'équation :

$$x = \frac{1}{2} \gamma' t^2 + V_0 t, \text{ où } \gamma' \text{ est négative et } V_0 = 1,5 \text{ m/s.}$$

II – 1) D'après le principe de la conservation de l'énergie mécanique, l'énergie potentielle qu'avait le système en A est égale à son énergie potentielle ($v=0$). Or, étant donné qu'on choisit comme origine des Z , le point A, l'énergie mécanique totale est donc nulle :

$$0 = \frac{1}{2} m.V^2 + mgZ \text{ (avec } Z < 0)$$

d'où :

$$V^2 = -2g \cdot Z = aZ$$

avec $a = -2g = -20$

$$V = \sqrt{-20 \cdot -20} = \underline{\underline{20 \text{ m/s}}}$$

2) Dans ce cas, la variation de l'énergie mécanique est due au travail fourni par le frein. La force T avec laquelle il tire sur la masse est égale à :

$$T = m(g - \gamma)$$

On a donc :

$$E_m = T \cdot Z = m(g - \gamma) Z$$

qui peut s'écrire :

$$E_m = m(g - \gamma)Z = mZg \left(\frac{g - \gamma}{g} \right) = mZg \left(1 - \frac{\gamma}{g} \right) =$$

$$= mZg \left(\frac{g/\gamma - 1}{g/\gamma} \right) = mZg \left(\frac{k - 1}{k} \right)$$

Si $k = 2$ et $Z = 20 \text{ m}$

$$E_m = 360 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 0,5 = \underline{\underline{36000 \text{ J}}}$$



Ex. - 10* :

Une voiture automobile de masse M entraîne une caravane de masse M'. La barre d'attelage entre la voiture et la caravane peut être assimilée à un ressort de raideur k, l'ensemble des frottements peut en être décomposé en une force f s'opposant au mouvement de la voiture et parallèle au sol et en une force f' s'opposant au mouvement de la caravane également parallèle au sol. On donne : M=800 Kg ; M'=1000 Kg ; f=80N ; f'=100N.

I — L'ensemble voiture-caravane part du repos sur une route horizontale et atteint une vitesse de 36 Km/h après un parcours de 1 Km. Le mouvement étant uniformément varié, calculer :

- L'accélération de l'ensemble pendant cette phase du mouvement,
- La force motrice développée par le moteur de la voiture.
- La puissance développée par le moteur à l'instant où la vitesse de l'ensemble est 36 Km/h.
- Le compte-tours du véhicule indique à cet instant que le moteur tourne à raison de 2000 tours/minute. Quel est le moment du couple exercé par l'arbre du moteur ? (On ne tient pas compte des pertes d'énergie au cours de la transmission).

II – La voiture et sa caravane roulent sur une côte à 5 pour cent. Au cours de la montée avec une vitesse constante de 36 Km/h, on supprime, à un instant t , la force motrice. Calculer, à partir de ce moment :

- L'accélération γ' de l'ensemble voiture-caravane (les forces de frottement étant supposées les mêmes que précédemment).
- La distance parcourue par l'ensemble jusqu'à ce que la vitesse s'annule.
- Montrer que l'allongement du ressort d'attelage est nul après suppression de la force motrice.

SOLUTION :

I – a) L'accélération : $\gamma = \frac{V^2}{2d} = \underline{\underline{0,05 \text{ m/s}^2}}$

b) La force motrice F développée par le moteur de la voiture :

$$F - f' - f = (M + M') \gamma$$

$$F = (M + M') \gamma + f + f' = (1800) 0,05 + 180 = \underline{\underline{1080 \text{ N}}}$$

c) Quand la vitesse est 36 Km/h = 10m/s, la puissance du moteur est :

$$P = \frac{F \cdot d}{t} = F \cdot v \\ = 1080 \cdot 10 = \underline{\underline{10800 \text{ W}}}$$

d) Le moment du couple de l'arbre est :

$M = F \cdot R$ (R : Rayon équivalent de l'arbre de transmission mais

$$R = \frac{V}{\omega} \text{ où } \omega = \frac{2000 \cdot 2\pi}{60} = 209 \text{ rad/s}$$

d'où :

$$M = F \frac{V}{\omega} = 1080 \cdot \frac{10}{209} = \underline{\underline{51,7 \text{ N.m}}}$$

II – a) Les forces résistantes sont en plus de f et f' , la composante parallèle au plan incliné de la pente du poids : $P \cdot \sin \alpha$. Ainsi, la décélération γ' :

$$\gamma' = \frac{-(f + f' + g(M' + M) \sin \alpha)}{M' + M} \\ = \frac{-(180 + (1800 \cdot 0,05 \cdot 10))}{1800} = -\underline{\underline{0,6 \text{ m/s}^2}}$$

b) La distance parcourue :

$$d = \frac{-V^2}{2\gamma'} = \frac{-100}{-1,2} = \underline{\underline{83,3 \text{ m}}}$$

c) La tension du ressort est égale à (pour la voiture) :

$$T + P' \sin \alpha + f' = M' \gamma$$

$$T = M(\gamma - g.\sin\alpha) - f' = 1000(0,6 - 0,5) - 100 = 0$$

On peut vérifier ce résultat en écrivant la même chose pour la caravane, on aura :

$$T' + P.\sin\alpha + f = M \gamma$$

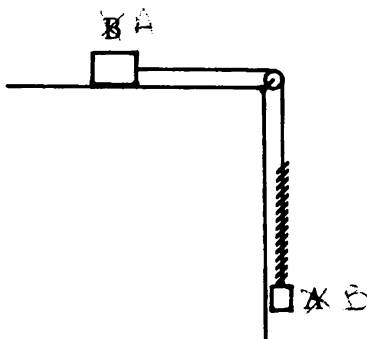
$$T' = M(\gamma - g.\sin\alpha) - f = 800(0,6 - 0,5) - 80 = 0$$

Donc l'allongement du ressort est nul.

Ex. - 11* :



On considère le dispositif représenté par le schéma suivant : A est un corps de masse $M=1400\text{g}$ qui peut glisser sans frottement sur le plan horizontal. B est un corps de masse $m=600\text{g}$. R est un ressort élastique à spires non jointives de raideur $K=100\text{ N/m}$, de longueur à vide $\ell_0=10\text{cm}$, de masse négligeable, lié à A par un fil inextensible sans masse. P est une poulie mobile autour de son axe horizontal.



1) On néglige la masse de la poulie.

a) A étant immobilisé :

✓ — Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre.

✗ — On tire B verticalement vers le bas et on le lâche sans vitesse initiale. Calculer la période des oscillations.

b) Le système ressort-corps B étant ramené à l'équilibre, on libère A. Calculer : - L'accélération du mouvement du système, - la nouvelle longueur du ressort.

2) La masse de la poulie n'est plus négligeable. Elle est supposée uniformément répartie sur sa circonférence de rayon $R=15\text{cm}$ et vaut $\mu = 1000\text{ g}$. A est libéré sans vitesse initiale.

- Calculer les nouvelles valeurs de l'accélération et de la longueur du ressort, - Calculer le nombre de tours effectués par la poulie au bout de 10 secondes.

II — On réalise à présent un pendule conique à l'aide du ressort précédent et du corps B assimilé à un point matériel. Le système décrit un cône de révolution de demi-angle au sommet $\alpha=60^\circ$. Déterminer :

1) La longueur du ressort.

2) Le nombre de tours effectués par B en une minute. (On prendra $g = 10\text{m/s}^2$ et $\pi^2=10$).

SOLUTION :

I- 1) a) A l'équilibre on a : $P=K\Delta\ell$ ($\Delta\ell$ = allongement du ressort.)

$$\Delta\ell = \frac{10 \cdot 0,6}{100} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 6 \text{ cm}$$

d'où la longueur du ressort :

$$\ell = \ell_0 + \Delta\ell = 10 + 6 = \underline{\underline{16 \text{ cm}}}$$

La période des oscillations de B :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,6}{100}} = \underline{\underline{0,48 \text{ s}}}$$

b) L'accélération de l'ensemble sera :

$$\gamma = g \frac{m}{M+m} = 10 \frac{0,6}{1,4+0,6} = \underline{\underline{3 \text{ m/s}^2}}$$

La tension du ressort sera :

$$P - T' = m\gamma \text{ donc } T' = m(g - \gamma) = 0,6(10 - 3) = \underline{\underline{4,2 \text{ N}}}$$

D'où le nouvel allongement du ressort :

$$\Delta\ell' = \frac{T'}{K} = \frac{4,2}{100} = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 4,2 \text{ cm}$$

et sa nouvelle longueur :

$$\ell = \ell_0 + \Delta\ell' = 10 + 4,2 = \underline{\underline{14,2 \text{ cm}}}$$

2) La nouvelle accélération est telle que :

$$\gamma_2 = g \frac{m}{M+m+J/R^2}$$

Où $J = \mu R^2$, moment d'inertie de la poulie. On peut écrire plus simplement :

$$\gamma_2 = g \frac{m}{M+m+\mu} = 10 \frac{0,6}{3} = \underline{\underline{2 \text{ m/s}^2}}$$

La tension sur le ressort sera : $T_2 = M(g - \gamma_2) = 4,8 \text{ N}$

$$\Delta\ell_2 = \frac{4,8}{100} = 4,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\ell_2 = \ell_0 + \Delta\ell_2 = 14,8 \cdot 10^{-2} = \underline{\underline{14,8 \text{ cm}}}$$

Pour calculer le nombre de tours effectués par la poulie, calculons tout d'abord le chemin parcouru par la masse m :

$$h = \frac{1}{2} \gamma_2 t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 100 = 100 \text{ m}$$

$$\text{d'où } N = \frac{h}{2\pi R} = \frac{100}{2,3,14,15,10^{-2}} = \underline{\underline{106 \text{ tours}}}$$

II – 1) La tension du ressort est égale à :

$$T = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{6}{0,5} = \underline{\underline{12 \text{ N}}}$$

D'où l'allongement du ressort :

$$\Delta \ell = \frac{T}{K} = \frac{12}{100} = 12,10^{-2} \text{ m} = 12 \text{ cm}$$

et sa longueur : $\ell = 10 + 12 = \underline{\underline{22 \text{ cm}}}$

2) La vitesse angulaire d'un pendule conique est :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell \cdot \cos \alpha}}$$

En une minute il fera donc N tours tels que :

$$N = \frac{\omega \cdot 60}{2\pi}$$

$$N = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{10}{22,10^{-2} \cdot 0,5}} = \underline{\underline{91 \text{ tours/minute}}}$$



Chapitre onzième

PHENOMENES VIBRATOIRES

Ex. - 1 - :

- 1) L'extrémité S d'un fil de fer de masse m , de longueur ℓ , tendue par une force F est animée d'un mouvement vibratoire transversal dont l'élongation est donnée en millimètres par $y = 0,5 \sin 200 \pi t$. Déterminer l'amplitude, la fréquence et la période de S. Connaissez-vous un moyen d'entretenir le mouvement de S ?
- 2) A 0°C , pour une tension de $F=40\text{N}$, la longueur de la corde est $\ell_0=4\text{m}$. Sachant que la masse du fil est $m=4\text{g}$, en déduire la célérité de propagation des ébranlements transversaux V_0 et la longueur d'onde λ_0 .
- 3) Calculer les variations de vitesse et de longueur d'onde, si la température passe de 0°C à 20°C . La tension reste 40N . Le coefficient de dilatation linéaire de la corde est : $k=2.10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.
- 4) La température est 0°C , la tension devient $F'=10\text{N}$.
 - a) En supposant que la longueur de la corde reste $\ell_0=4\text{m}$, quelle serait la nouvelle longueur d'onde λ'_0 ?
 - b) En fait la corde diminue de 4mm de longueur. De combien faut-il corriger λ'_0 ?

SOLUTION :

- 1) De l'équation donnant la variation de l'élongation de l'extrémité S : $y = 0,5 \sin 200 \pi t$.

On voit que c'est un mouvement sinusoïdal rectiligne, dont les caractéristiques sont :

l'amplitude : $a = 5\text{mm}$

la pulsation : $\omega = 200\pi \text{ rad/s}$

la fréquence : $N = 100 \text{ Hz}$

la période : $T = 0,01 \text{ s}$

On peut entretenir ce mouvement en accolant l'extrémité S de la corde à tout système animé d'un tel mouvement : diapason, ressort, lame vibrante, électro-aimant, etc...

- 2) La célérité des ébranlements V est reliée à F (tension de la corde) et μ , (la masse linéaire) par :

$$V = \sqrt{F/\mu}$$

$$\text{On a donc à } 0^\circ\text{C} : V_0 = \sqrt{F \cdot \ell_0/m} = \sqrt{40 \cdot 4 / 4 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{200 \text{ m/s}}}$$

$$\text{et } \lambda_0 = V_0 T = 200 \cdot 0,01 = \underline{\underline{2 \text{ m}}}$$

3) A 20°C ; la longueur devient :

$$\begin{aligned} \ell &= \ell_0 (1 + K\theta) \\ &= 4(1 + (2 \cdot 10^{-5} \cdot 20)) = 4,0016 \text{ m} \end{aligned}$$

d'où :

$$V = \sqrt{40 \cdot 4,0016 / 4 \cdot 10^{-3}} = 200,04 \text{ m/s}$$

$$\lambda = \underline{\underline{2,0004 \text{ m}}}$$

$$4) \text{ a) } V'_0 = \sqrt{10 \cdot 4 / 4 \cdot 10^{-3}} = 100 \text{ m/s}$$

$$\lambda'_0 = 100 \cdot 0,01 = 1 \text{ m}$$

REMARQUE : On peut écrire aussi plus directement que λ est proportionnelle à $\sqrt{F}$

d'où :

$$\lambda_0 \cdot \sqrt{F'} = \lambda'_0 \cdot \sqrt{F}$$

$$\text{b) La longueur étant : } \ell = 4 - 4 \cdot 10^{-3} = 3,996$$

$$V = \sqrt{10 \cdot 3,996 / 4 \cdot 10^{-3}} = 99,949 \text{ m/s}$$

$$\lambda = 0,999 \text{ m}$$

$$\Delta\lambda = 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta\lambda/\lambda = 10^{-3}$$



Ex. - 2 - :

Une lame vibrante, de fréquence $f=100\text{Hz}$, est munie d'un stylet qui détermine en un point S de la surface d'une nappe d'eau une perturbation transversale, périodique, sinusoïdale, de même période, d'amplitude 1mm, se propageant dans toutes les directions à la surface du liquide à la vitesse uniforme de 37 cm/s.

1) Ecrire l'équation du mouvement de S en fonction du temps, puis l'équation du mouvement d'un point M situé à la distance d de S. (On supposera qu'on peut négliger la variation d'amplitude sur le faible espace où l'on opère).

Représenter graphiquement les résultats obtenus en prenant pour valeur particulière $d=14,8\text{mm}$.

2) Quel est l'aspect de la surface de l'eau à un instant t quelconque ?

Représenter graphiquement cet aspect le long d'un rayon Sx quelconque, à l'instant $t=0,06\text{ s}$, puis $t=0,065\text{ s}$. (Origine des temps : instant où la perturbation débute en S , le point S allant vers le haut).

SOLUTION :

1) L'équation du mouvement de S (pris comme origine) :

$$x = a \sin 2\pi (t/T)$$

$$\text{où } a = 10^{-3}\text{ m et } T = 10^{-2}\text{ s}$$

Le point M aura pour équation :

$$x' = a \sin 2\pi (t/T - x/\lambda) \quad (1)$$

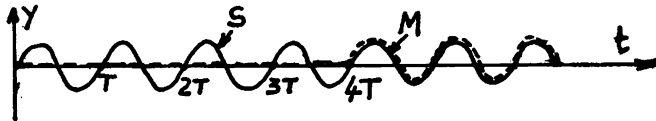
$$\text{où } \lambda = V \cdot T = 37 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}$$

$$= 37 \cdot 10^{-4}\text{ m}$$

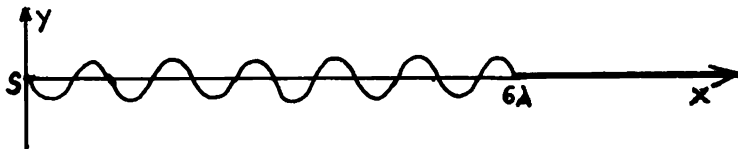
$$\text{si } x = 14,8 \cdot 10^{-3}\text{ m}$$

$$\text{On a : } x/\lambda = 14,8 \cdot 10^{-3} / 37 \cdot 10^{-4} = 4$$

Cela veut dire que le point M entame son mouvement 4 périodes plus tard que S .

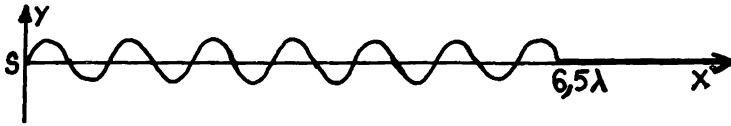


2) L'aspect de la surface de l'eau est caractérisé par le déplacement à partir de S d'une onde progressive de période λ . L'équation de la surface de l'eau est donnée par (1) où l'on pose $t=\theta$ (constant), la variable restant x (sinusoïde). Ainsi à l'instant $t=0,06\text{ s}$, il y a appàrition de 6 longueurs d'onde, le reste de la surface étant au repos :



$$t = 0,06\text{ s}$$

à $t = 0,065 \text{ s}$ on a $6,5 \lambda$



Ex. - 3* :

1) Un point matériel A est animé d'un mouvement sinusoïdal rectiligne de fréquence 80 hertz et d'amplitude 3mm. En prenant pour origine des temps l'instant où le point A passe par sa position d'équilibre dans le sens positif des élongations, donner l'expression de son élongation y en fonction du temps. A quels instants l'élongation du point A sera-t-elle égale à 1,5mm, le point A se déplaçant dans le sens des élongations décroissantes ?

2) Ce point matériel est pris à l'extrémité d'un vibreur, lié à une corde élastique, sans raideur, de longueur infinie, à qui il imprime une vibration transversale. La célérité de la propagation le long de la corde est de 16 m/s.

a) Donner en fonction du temps l'expression de l'élongation d'un point B situé à 5 cm de A.

Quelle sera l'élongation du point B aux instants $t_1 = 0,1 \text{ s}$; $t_2 = 0,1125 \text{ s}$; $t_3 = 0,1130 \text{ s}$?

b) Quel sera l'aspect de la corde aux instants t_1 , t_2 , t_3 ; (faire un graphique) ? Vérifier sur le graphique, les élongations du point B aux instants t_1 , t_2 et t_3 .

SOLUTION :

1) L'expression de l'élongation est :

$$y_A = a \sin \omega t$$

$$\text{où } a = 3 \cdot 10^{-3}$$

$$\omega = 2 \pi N = 160 \pi \text{ rad/s}$$

$$\text{si } y_A = 1,5 \cdot 10^{-3}$$

$$\sin 160 \pi t = 0,5$$

$$160 \pi t = (\pi - \pi/6) + 2 K \pi \quad (v < 0)$$

$$t = (0,0052 + \frac{K}{80}) \text{ s} \quad (K = 0, 1, 2, \dots)$$

2) Si B est éloigné de A de x , son élongation aura pour expression :

$$y_B = a \sin 2\pi (t/T - x/\lambda)$$

avec $\lambda = v/N = 0,2 \text{ m}$

$$T = 1/80$$

$$x = 5.10^{-2} \text{ m}$$

$$y_B = 3.10^{-3} \sin (160\pi t - \pi/2)$$

pour $t_1 = 0,1 \text{ s}$; $y_1 = 3.10^{-3} \sin (16\pi - \pi/2)$

$$y_1 = -3.10^{-3} \text{ m}$$

pour $t_2 = 0,1125 \text{ s}$; $y_2 = 3.10^{-3} \sin (18\pi - \pi/2)$

$$y_2 = -3.10^{-2} \text{ m}$$

pour $t_3 = 0,1130 \text{ s}$ $y = 3.10^{-3} \sin (160\pi \cdot 0,1130 - \pi/2)$

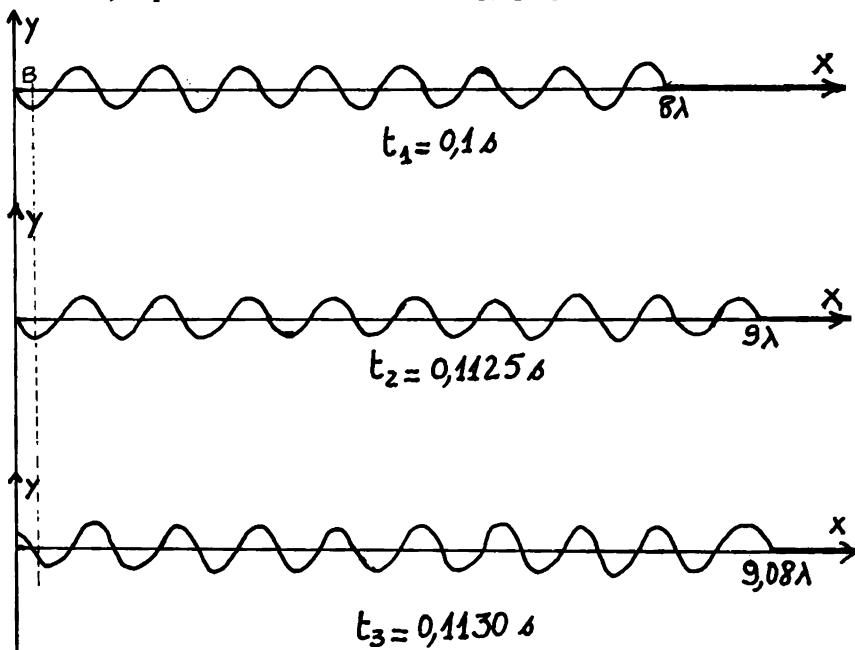
$$y = 3.10^{-3} \sin (0,08\pi - \pi/2)$$

$$y = 3.10^{-3} \sin (-0,42\pi)$$

$$y = -2,9.10^{-3} \text{ m}$$

Dans les trois cas, le point B est animé d'une vitesse positive.

b) Aspect de la corde aux instants t_1, t_2, t_3 :



Aux instants : t_1 , on a : $0,1 \cdot 80 = 8$ longueurs d'ondes d'excitées.

B étant à 5cm, ou $\lambda/4$ de S.

t_2 , on a 9 longueurs d'ondes.

t_3 , on a 9 longueurs d'ondes et $0,08\lambda$ d'excitées. Le front d'onde sera à :

$$9,08 \cdot 0,2 = 1,816 \text{ m}$$

Le point B vérifie bien les résultats calculés.



Ex. - 4* :

Une onde progressive se propage dans un milieu dont les particules sont animées d'un mouvement périodique représenté par l'équation : $y=4\sin(-\frac{2\pi t}{6} + \phi)$ dans laquelle le temps t est exprimé en seconde et l'élongation y en centimètre.

1) Calculer la vitesse de propagation du mouvement vibratoire sachant que la longueur d'onde est égale à 240 cm.

2) Calculer la différence des phases correspondant à deux positions occupées par la même particule à 1 s d'intervalle.

3) Calculer, à un instant donné, la différence des phases correspondant à deux particules séparées par une distance de 210cm dans la direction de propagation.

4) L'élongation à un instant donné d'une certaine particule est égale à 3cm. Quelle sera l'élongation de la même particule 2 s plus tard ? Interpréter, à l'aide d'un diagramme, les deux solutions obtenues.

SOLUTION :

1) D'après l'équation :

$y = 4 \sin(-\frac{2\pi t}{6} + \phi)$; on voit que le mouvement est sinusoïdal rectiligne avec les caractéristiques suivantes :

l'amplitude : $a = 4 \text{ cm}$

La phase instantanée : $2\pi t/6 + \phi$

La pulsation $\omega = 2\pi/6 \text{ rad/s}$

La période $T = 6 \text{ s}$

Phase initiale : ϕ

On sait d'autre part, que la longueur d'onde λ par définition, est telle que :

$$\lambda = V.T$$

$$\text{d'où } V = \lambda/T = 240/6 = \underline{\underline{40 \text{ cm/s}}}$$

2) La différence de phase est obtenue en posant dans l'expression de la phase instantanée $t=1$ et $t=0$ (par exemple) et on fait la différence :

$$\Delta\phi = (2\pi/6 + \phi) - \phi = \pi/3 \text{ rad}$$

3) Séparées de x , deux particules auront comme différence de phase :

$$\Delta\phi = 2\pi x/\lambda = 2\pi \cdot 210/40 = 5,2\pi + \pi/2$$

Elles sont en quadrature.

4) Choisissons $t=0$ (origine des dates), l'instant où la particule est à 3 cm, on aura :

$$3 = 4 \sin \phi$$

$$\phi \approx 48^\circ \quad (V_0 > 0)$$

$$\phi \approx (180 - 48) \approx 132^\circ \quad (V_0 < 0)$$

d'où les deux équations : (angles exprimés en degré)

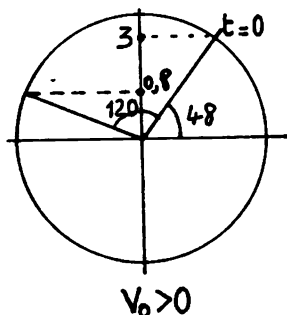
$$y = 4 \sin (360t/6 + 48)$$

$$\text{et } y' = 4 \sin (360t/6 + 132)$$

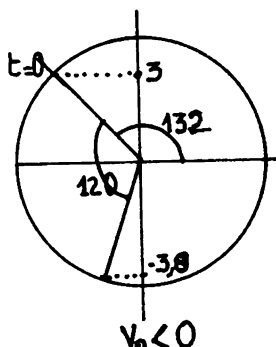
Ainsi 2s plus tard, on a :

$$y = 4 \sin 168^\circ = 0,8 \text{ cm}$$

$$y = 4 \sin 252^\circ = -3,8 \text{ cm}$$



— o o —



Ex. - 5* :

Un milieu élastique est parcouru par des ondes progressives transversales sinusoïdales. On a tracé le diagramme du mouvement de la source S (sinusoïde des temps) et la sinusoïde des espaces à l'instant $t=0$.

1) Déterminer la vitesse de propagation des ondes.

2) Ecrire l'équation horaire du mouvement d'un point M situé à 12,5 cm de O.

3) Déterminer le sens du mouvement de S à l'instant $t=0$, en considérant successivement :

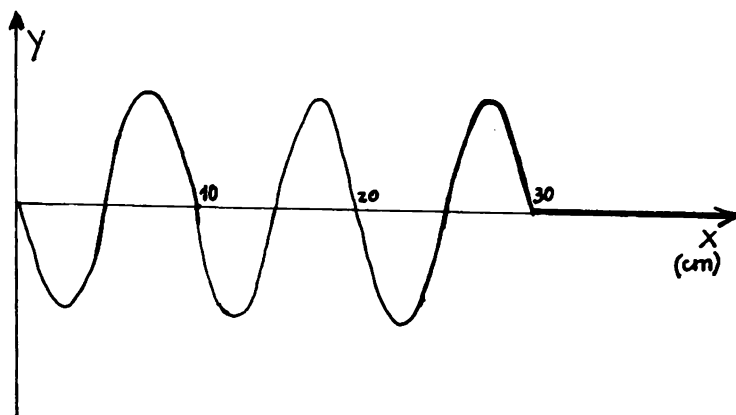
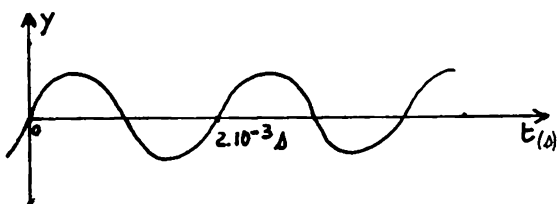
a) la sinusoïde des temps ;

b) la sinusoïde des espaces.

Les deux méthodes conduisent-elles au même résultat ?

4) Dessiner la sinusoïde des espaces à l'instant $t = 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

5) Le mouvement de S a commencé à l'instant $t = -4 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Comment faut-il modifier le diagramme des espaces ?



SOLUTION :

1) La sinusoïde des temps nous donne la période $T = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ et celle des espaces la longueur d'onde $\lambda = 10 \text{ cm}$, d'où la vitesse de propagation des ondes :

$$V = \lambda/T = 10^{-1}/2 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{50 \text{ m/s}}}$$

2) L'équation horaire du mouvement de O s'écrit :

$$y_O = 2 \cdot 10^{-4} \sin(2\pi t/2 \cdot 10^{-3} + 6\pi)$$

$$y_O = 2 \cdot 10^{-4} \sin(10^3 \pi t + 6\pi)$$

La phase initiale $\phi = 6\pi$, est tirée de la sinusoïde des espaces, où on voit qu'à $t=0$, il y a 3 longueurs d'ondes d'excitées. Le mouvement a démarré à $t = -6 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

Le point M situé à $d = 12,5 \text{ cm}$ aura la même équation mais avec un déphasage :

$$\Delta\phi = 2\pi d/\lambda = -2\pi \cdot 12,5/10$$

$$\Delta\phi = -5\pi/2$$

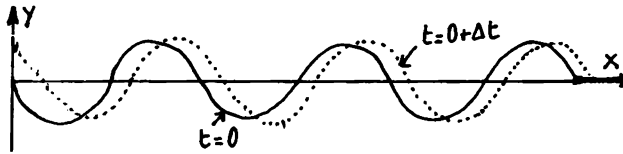
Ainsi :

$$y_O = 2 \cdot 10^{-4} \sin(10^3 \pi t + 6\pi - 5\pi/2)$$

ou aussi $y_O = 2 \cdot 10^{-4} \sin(10^3 \pi t + 7\pi/2)$

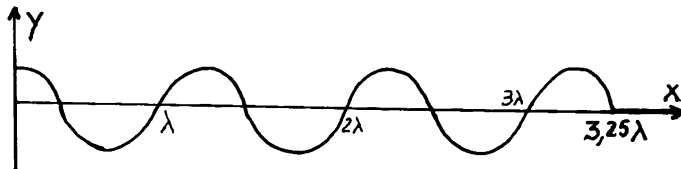
3) La sinusoïde des temps nous montre qu'à l'instant $t=0$, le point S démarre de zéro avec une vitesse positive : l'élongation à $(0+\Delta t)$ est positive.

La sinusoïde des espaces permet aussi de déduire que O se déplace vers les élongations positives. Il suffit pour bien le voir, de représenter la sinusoïde des espaces à $t=(0+\Delta t)$.



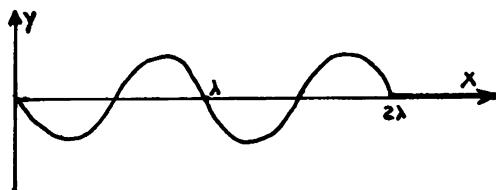
4) A l'instant $t = 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, on a les ondes qui se sont déplacés de

$$x = V \cdot t = 50 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 25 \cdot 10^{-3} = \lambda/4$$



5) On a vu au 2^o), qu'à $t=0$, il y a 3 longueurs d'ondes excitées sur la sinusoïde des espaces, ce qui prouve que le mouvement a commencé à -6.10^{-3} s. Si le mouvement commence à -4.10^{-3} s on aura :

$$N = \frac{4.10^{-3}}{2.10^{-3}} = 2 \text{ sinusoïdes}$$



Ex. - 6* :

Un diapason vibrant à la fréquence de 50 Hertz porte à l'extrémité de l'une de ses branches une pointe verticale qui frappe en un point S la surface d'un liquide que l'on supposera indéfiniment étendue. Les ondes se propagent à la surface de ce liquide avec une célérité V de 1 mètre par seconde.

- Quel est l'aspect de la surface 2 s après le lancement du diapason ?
- Combien de rides peut-on alors compter ?
- Quelle est la distance de 2 rides consécutives ?

2) L'équation du mouvement du point S est de la forme : $y = -a \sin \omega t$ où y et a , sont exprimés en mm et t en secondes.

- Quelle est la valeur numérique de ω ?
- Quelle est l'amplitude du mouvement de S si $y = -3$ mm pour $t = 1/200$ seconde ?
- Quelles sont l'élongation et la vitesse V de S, à l'instant $t = 1/400$ seconde ?

3) On observe la surface en stroboscopie. Le disque du stroboscope porte 5 trous. A quelles vitesses peut-il tourner pour que les rides paraissent immobiles ?

- Quelle est l'équation du mouvement d'un point M situé à une distance D de S ? Application numérique : $D = 12,5$ cm
- Quelle est l'élongation du point M à l'instant $t = 0,1$ s ?

SOLUTION :

- La longueur d'onde vaut :

$$\lambda = V/f = 1/10 = 0,02 \text{ m}$$

Aspect de surface à $t=2s$: on verra N longueurs d'ondes formées avec N rides situées à $0,02$ m l'une de l'autre.

$$N = t/T = 2 \times 50 = 100$$

2) a) $\omega = 2\pi F = 100\pi$ rad/s

b) L'équation horaire s'écrit :

$$y = -a \sin 100\pi t$$

on a : $-3.10^{-3} = -a \sin (100\pi/200)$

$$a = 3.10^{-3} \text{ m}$$

c) Si $t = 1/400s$, l'élongation est égale à :

$$y = 3.10^{-3} \sin (100\pi/400)$$

$$= 2,12.10^{-3} \text{ mm}$$

$$v = 3.10^{-3} \cdot 100\pi \cdot \cos \pi/4 = + 0,66 \text{ m/s}$$

3) La période du diapason doit être un multiple entier de celle des éclairs qui est $1/5N'$ (N' fréquence du disque).

$$1/5N' = K/50$$

$$N' = 10/K$$

Donc les fréquences que peut avoir le disque, sont égales à :

$$N' = 10, 5, 2 \text{ et } 1 \text{ tours/seconde}$$

4) a) M aura la même équation mais un déphasage :

$$\Delta\phi = -2\pi D/\lambda = -2\pi \cdot 12,5/2$$

$$y_m = 3.10^{-3} \sin (100\pi t - 12,5\pi) \quad (1)$$

b) à $t = 0,1s$

$$y_m = 3.10^{-3} \sin (10\pi - 12,5\pi) = 3.10^{-3} \sin \left(\frac{-\pi}{2} \right)$$

$$y_m = -3.10^{-3}$$



Ex. - 7 - :

Trouver au moyen de la construction de Fresnel, la fonction y , somme algébrique des fonctions sinusoïdales de même période :

$$(1) y_1 = a \sin(\omega t + \pi/3)$$

$$y_2 = a \sin(\omega t - \pi/3)$$

$$(2) y_1 = 3 \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$y_2 = 4 \sin(\omega t + \pi)$$

$$(3) y_1 = 4 \sin(\omega t + \pi/2)$$

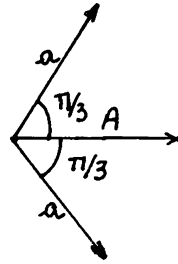
$$y_2 = 3 \sin(\omega t - \pi/3)$$

SOLUTION :

$$1) y = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\text{avec : } A = 2a \cos \pi/3 = a$$

$$\phi = 0$$

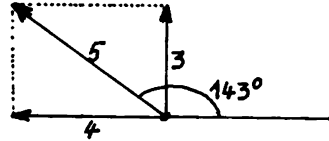


$$2) y = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$A = 5$$

$$\phi = \arccos(-4/5)$$

$$\phi = 143^\circ$$



$$3) y = A \sin(\omega t + \phi)$$

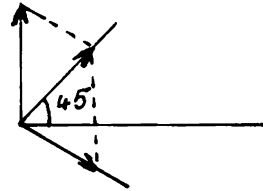
$$A^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \pi/6 \cong 25 + 12 = 37$$

$$A = 6,1$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{4 \sin \pi/2 - 3 \sin(-\pi/3)}{4 \cos \pi/2 + 3 \cos(-\pi/3)}$$

$$= \frac{4 - 2,5}{1,5} = 1$$

$$\phi = 45^\circ$$



Ex. - 8 * :

A l'extrémité de l'une des branches d'un diapason, vibrant à la fréquence $N=100$ Hz, est fixée une tige munie d'une fourchette dont les extrémités, munies de stylets, sont distantes de $d=2$ cm. Elle vibre, au-dessus d'une nappe d'eau en deux points S_1 et S_2 où elle détermine des vibrations sinusoïdales de même amplitude, $a=1$ mm, se propageant à la vitesse, $V=40$ cm/s.

1) Ecrire l'équation horaire du mouvement d'un point M de la surface de l'eau situé à la distance d_1 de S_1 et d_2 de S_2 . On indiquera comment est choisie l'origine des temps.

A.N : $d_1 = 1,1$ cm ; $d_2 = 2$ cm.

2) Déterminer l'ensemble des points où l'amplitude est maximale. Combien y a-t-il de lignes d'amplitude maximale ? Déterminer leurs points d'intersection avec la droite $S_1 S_2$.

3) Déterminer le lieu des points à amplitude nulle, leur intersection avec $S_1 S_2$.

SOLUTION :

1) Prenons comme origine des temps $t=0$, l'instant où les deux sources sont à l'origine avec une vitesse positive ($\phi = 0$). Donc leur équation commune sera :

$$y_1 = y_2 = a \sin \omega t$$

où : $a = 10^{-3}$ m et $\omega = 2\pi N = 200\pi$ rad/s

Ces deux mouvements vont se propager sur la surface de l'eau, en se superposant en chaque point.

Considérons un point M ; si S_1 était seul, M aurait un mouvement tel que

$$y'_1 = a \sin 2\pi (t/T - d_1/\lambda)$$

Si S_2 était seul, M aurait un mouvement :

$$y'_2 = a \sin 2\pi (t/T - d_2/\lambda)$$

On a donc :

$$Y = y'_1 + y'_2 = 2a \cos \pi \frac{d_2 + d_1}{\lambda} \sin 2\pi \left(t/T - \frac{d_1 + d_2}{2\lambda} \right)$$

Cela veut dire que M (d_1, d_2) a un mouvement sinusoïdal dont l'amplitude et la phase initiale dépendent de d_1 et d_2 :

L'amplitude $A = 2 a \cos \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda}$

et la phase initiale $\phi = -\pi \frac{d_1 + d_2}{\lambda}$

A.N. : $\lambda = V/N = 0,4/400 = 4.10^{-3} \text{ m}$

$$Y = 2.10^{-3} \cdot \cos(9\pi/4) \cdot \sin(200\pi t - 62\pi/8)$$

ou aussi : $Y = 2.10^{-3} \cdot \cos \pi/4 \cdot \sin(200t + \pi/4)$

$$Y = \sqrt{2}.10^{-3} \cdot \sin(200t + \pi/4)$$

2) L'amplitude est maximale quand :

$$\cos \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = \pm 1$$

c'est-à-dire : $d_2 - d_1 = K\lambda$ ($K = 0, 1, 2, 3, \dots$)

Cette dernière conclusion permet de dire que l'ensemble des points qui ont une amplitude maximale, forme une famille d'hyperboles (lieu géométrique des points dont la différence des distances à deux points fixes, est constante). Pour chaque valeur de K , on aura une hyperbole.

Considérons le segment de droite $S_1 S_2 = d = 2 \text{ cm}$:

Nous avons pour les points à amplitude maximale, les deux expressions suivantes :

$$d_2 + d_1 = d \text{ et } d_2 - d_1 = K\lambda$$

qui nous donne en les additionnant :

$$d_2 = d/2 + K\lambda/2 \quad (1)$$

Donc les sommets des franges sont à $\lambda/2$, les uns des autres.

En écrivant que :

$$\begin{aligned} 0 &\leq d_2 \leq 20 \\ 0 &\leq d/2 + 2K \leq 20 \\ 0 &\leq 10 + 2K \leq 20 \\ -5 &\leq K \leq +5 \end{aligned}$$

$$K = 0, -1, -2, -3, -4, -5, 1, 2, 3, 4, 5.$$

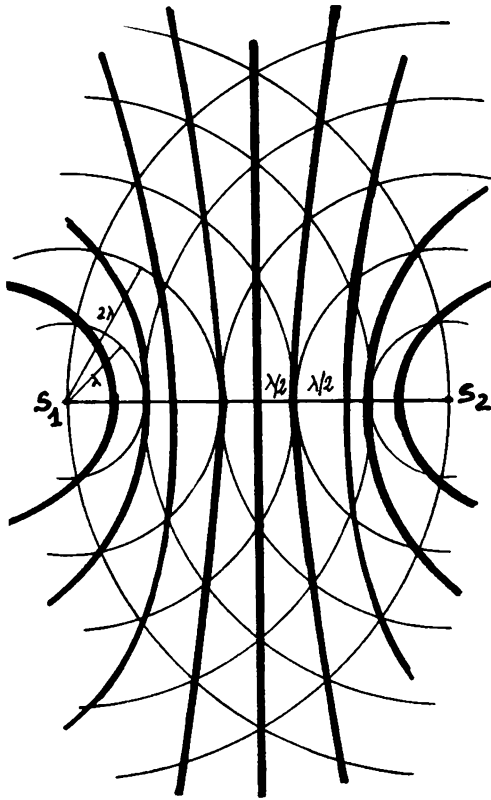
On a donc 11 hyperboles (11 franges entre S_1 et S_2).

$K = 0 \longrightarrow d_1 = d_2 = d/2$; c'est la médiatrice.

D'après (1) on voit que d_2 prendra les valeurs suivantes qui sont les intersections des hyperboles avec la droite $S_1 S_2$:

$$\begin{aligned} d_2 &= \pm 8 \text{ pour } K = \pm 2 ; \pm 6 \text{ pour } K = \pm 4 ; \\ &\pm 4 \text{ pour } K = \pm 6 ; \pm 2 \text{ pour } K = \pm 8 \end{aligned}$$

quand $K = \pm 10$, $d_2 = \pm 20$ (ce sont les sources elles-mêmes).



3) Les points dont l'amplitude est nulle, vérifient les relations suivantes:

$$d_2 - d_1 = (2K' + 1) \lambda/2$$

$$d_2 + d_1 = d$$

d'où après addition :

$$d_2 = d/2 + (2K' + 1) \lambda/4$$

On tire, en posant :

$$0 \leq d_2 \leq 20$$

$$K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4.$$

Sur $S_1 S_2$; pour $K' = 0$: Les intersections sont de part et d'autre de la médiatrice à $\lambda/4 = 1 \text{ mm}$.

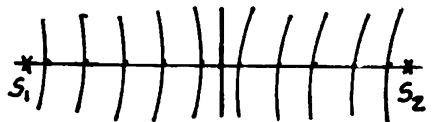
En prenant I, origine de l'axe $S_1 S_2$.

$$d_2 = \pm 3 \text{ pour } K' = \pm 1$$

$$d_2 = \pm 5 \text{ pour } K' = \pm 2$$

$$d_2 = \pm 7 \text{ pour } K' = \pm 3$$

$$d_2 = \pm 9 \text{ pour } K = \pm 4$$



Ex. - 9 - :

On considère deux sources synchrones A et B, de même amplitude a , de même fréquence $f=85$ Hz, distantes de d .

- 1) Si on admet pour date zéro un instant où les deux sources passent par leur position d'équilibre, quelle est leur élongation y_0 à la date t ?
- 2) Quelle est la longueur d'onde, si la vitesse de propagation est de 340 m/s ?
- 3) Quelles sont, à la date t , les élongations des deux mouvements qui arrivent en un point M situé sur la droite BA, à 100 m de A ?
- 4) Déterminer, en utilisant la construction de Fresnel, le mouvement qui en résulte pour M dans les 3 cas suivants :
a) $d=4$ m, b) $d=2$ m, c) $d=1$ m.

SOLUTION :

- 1) C'est un mouvement sinusoïdal dont l'équation s'écrit :

$$y_0 = a \sin \omega t + \phi$$

$$\text{où : } \omega = 2\pi N = 170\pi \text{ rad/s}$$

$$\phi = 0 \text{ (dans le cas où la vitesse est négative à } t=0, \phi=\pi)$$

- 2) Par définition :

$$\lambda = V/N = 340/85 = 4 \text{ m}$$

- 3) Si A vibrait seul, en M on aura :

$$y_1 = a \sin 2\pi (85 t - 100/4) = a \sin 2\pi (85t - 25)$$

Si B vibrait seul, en M on aura :

$$y_2 = a \sin 2\pi (85t - (100+d)/4) = a \sin 2\pi (85t - 25 - d/4)$$

La superposition de ces deux mouvements nous donne :

$$Y = 2a \cos \pi d/2 \cdot \sin 2\pi (85t - 25 - d/8)$$

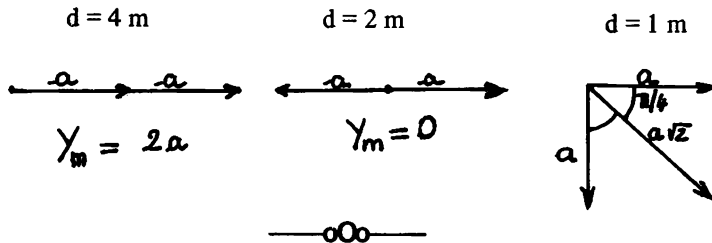
- 4) Les trois équations peuvent s'écrire (vibration due à B)

$$y_2 = a \sin (170 \pi t)$$

$$y_2 = a \sin (170 \pi t - \pi d/2) = a \sin (170 \pi t - \pi)$$

$$y_3 = a \sin (170 \pi t - \pi/2)$$

En les superposant, au mouvement dû à A, on a les diagrammes de Fresnel suivants :



Ex. 10 - :

Deux sources S_1 et S_2 , sinusoïdales, synchrones, d'élongations parallèles, vibrent suivant l'équation horaire : $y = 2\sin 100\pi t$. Elles sont distantes de 20cm. Les ondes, transversales atteignent un point M_1 situé à 81cm de S_1 et à 75cm de S_2 ; M_2 (24 et 36cm) ; M_3 (36 et 129cm). La propagation s'effectue avec la célérité 1,2 m/s, sans variation de l'amplitude. Calculer l'amplitude des points M ; donner leur équation horaire.

SOLUTION :

La longueur d'onde de cette propagation est égale à :

$$\lambda = V/N = 1,2/50 = 2,4 \text{ cm}$$

Si S_1 vibre toute seule, on a :

$$\begin{aligned} y' &= 2\sin(100\pi t - 2\pi \cdot 81/2,4) = \\ &= 2\sin(100\pi t - 67,5\pi) = 2\sin(100\pi t + \pi/2) \end{aligned}$$

Si S_2 vibre toute seule, on a :

$$\begin{aligned} y'' &= 2\sin(100\pi t - 2\pi \cdot 75/2,4) = \\ &= 2\sin(100\pi t - 62,5\pi) = 2\sin(100\pi t - \pi/2) \end{aligned}$$

en ajoutant 62π à la phase initiale.

D'où en M on a :

$$Y = y' + y'' = 4 \cos \frac{\pi}{2} \sin(100\pi t - \frac{\pi}{2})$$

M_1 est un point au repos ($\cos \pi/2 = 0$)

Pour M_2 on aura de la même façon :

$$Y = 4\sin(100\pi t - \pi)$$

M_2 a une amplitude maximale et vibre en opposition de phase avec S_1 et S_2 .

Pour M_3 on a : $Y = 4\sin(100\pi t)$

M_3 a une amplitude maximale et vibre en phase avec les sources S_1 et S_2

Ex. - 11 - :

Une corde AB de longueur 15m, fixée en B, reçoit en A des impulsions rythmées transversales, de faible amplitude, de fréquence 2 Hz. La célérité des ondes le long de la corde est 20m/s. On néglige tout amortissement.

- a) Quelle est la durée d'un aller et retour d'un train d'ondes ?
- b) Quelle est la longueur d'onde ? Combien de fuseaux voit-on ?
- c) Qu'arriverait-il si la fréquence devenait 4 Hz ? 8 Hz ?

SOLUTION :

a) $t = 2\ell/v = 30/20 = 1,5 \text{ s}$

b) $\lambda = V/N = 10 \text{ m}$

On a :

$$n = \frac{\ell}{\lambda/2} = 3 \text{ fuseaux}$$

c) $\lambda = 20/4 = 5 \text{ m}$

$$n = \frac{15}{2,5} = 6 \text{ fuseaux}$$

$$\lambda = 20/8 = 2,5 \text{ m}$$

$$n = \frac{15}{1,25} = 12 \text{ fuseaux}$$

**Ex. - 12* :**

Une corde verticale 00', de longueur 1m est attachée, à sa partie supérieure 0, à l'une des branches d'un diapason, entretenu électriquement, de fréquence 50 Hz. Son extrémité inférieure 0' est pratiquement immobilisée par une plaque métallique mince, percée d'un petit trou au travers duquel passe la corde. Un poids P, accroché à l'extrémité inférieure 0', tend la corde.

1) Sachant que la corde vibre fortement en un seul fuseau pour $P=20 \text{ N}$, calculer la masse de la corde. (On rappelle que la célérité des ondes transversales le long de la corde a pour expression : $V=\sqrt{P/\mu}$; avec V en m/s, P en N et μ en Kg/m).

2) Pour quelles valeurs du poids P la corde se partage-t-elle en vibrant en 2, 3, 4 fuseaux ? On indiquera, à l'aide d'une figure, comment vibre la corde quand elle se partage en 3 fuseaux et l'on en déduira la position des nœuds et des ventres.

SOLUTION :

1) Si la corde vibre en un seul fuseau, sa longueur est égale à $\lambda/2$, donc
 $\lambda = 2 \text{ m}$

On sait par ailleurs que :

$$\lambda = v/n = (\sqrt{P/\mu})/n$$

$$\text{d'où } \mu = P/(\lambda^2 \cdot n^2) = m = 20/(4 \cdot 2500) = \underline{\underline{2 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}}}$$

($\mu = m$, étant donné que la longueur est égale à 1 m)

2) Si on a 2 fuseaux, λ est égale à 1 m, donc :

$$P = \mu \cdot \lambda^2 \cdot n^2 = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 2500 = 5 \text{ N}$$

– Pour 3 fuseaux :

$$\lambda = 2/3$$

$$\begin{aligned} P &= \mu \cdot \lambda^2 \cdot n^2 \\ &= 2 \cdot 10^{-3} \cdot 4/9 \cdot 2500 \\ &= 2,22 \text{ N} \end{aligned}$$

– Pour 4 fuseaux :

$$\lambda = 0,5 \text{ m}$$

$$P = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,25 \cdot 2500 = 1,25 \text{ N}$$



Quand la corde présente 3 fuseaux, le point O est un ventre (vibration à amplitude maximale du diapason. Les ventres seront en O ; en A ($\lambda/2=1/3\text{m}$) ; en B ($2/3\text{m}$). Les nœuds seront en C ($\lambda/4=1/6\text{m}$) ; D ($1/2\text{m}$) ; en E ($5/6\text{m}$).

Ex. - 13* :



Un fil de fer est tendu horizontalement sur une longueur $AB=1\text{m}$, entre une poulie A et l'une des branches B d'un diapason entretenu, disposé de telle sorte que le déplacement de B soit transversal par rapport au fil. Au-delà de la poulie, le fil supporte un plateau chargé d'un poids P. La masse de 10 m du fil considéré est égale à 2 g. La fréquence f des oscillations du diapason est égale à 100 Hz. On rappelle que la célérité de propagation d'une vibration le long du fil (en m/s est égale à $\sqrt{P/\mu}$, désignant par P le poids tenseur (en N) et par μ la masse de l'unité de longueur de ce fil (en Kg/m). Lorsqu'on fait varier progressivement le poids P, on constate que, pour certaines valeurs de ce poids, le fil vibre fortement en formant un ou plusieurs fuseaux. Ecrire la relation entre le nombre K des fuseaux et le poids tenseur P. Quelle valeur doit-on donner à celui-ci pour faire apparaître 2 fuseaux ?



SOLUTION :

On sait que le nombre de fuseaux K est :

$$K = 2\ell/\lambda$$

$$\text{or } \lambda = v/N = (\sqrt{P/\mu})/N$$

$$\text{donc } K = 2\ell N/(\sqrt{P/\mu})$$

ou aussi :

$$K^2 = 4\ell^2 N^2 \mu/P$$

Pour 2 fuseaux, on a :

$$P = 4 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} / 4 = 2 \text{ N}$$



Ex. - 14 - :

Dans une expérience de Melde, la corde de longueur $\ell = 1$ m et de masse $m = 20$ g est tendue par un poids P . Pour une fréquence $N = 50$ Hz du vibreur excitateur, on obtient 5 fuseaux bien nets. Calculer $P + \Delta P$ sachant que $\Delta \ell = 1$ cm et $\Delta m = 0,1$ g.

SOLUTION :

On sait que le nombre K de fuseaux est tel que :

$$K = 2 \cdot \ell/\lambda$$

$$\text{or } \lambda = v/N = (\sqrt{P/\mu})/N$$

$$\text{donc } K = 2 \cdot \ell \cdot N/(\sqrt{P/\mu})$$

$$\text{d'où } P = 4 \cdot \ell \cdot N^2 \cdot m/K^2$$

$$P = \frac{4 \cdot 2500}{25} \cdot 1 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 8 \text{ N}$$

$$\frac{\Delta P}{P} = 10^{-2} + (0,5 \cdot 10^{-2}) = 1,5 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta P = 0,12$$

$$P = (8 \pm 0,12) \text{ N}$$



Chapitre douzième

INTERFERENCES LUMINEUSES

Ex. - 1 - :

On réalise l'expérience des trous d'Young avec deux trous distants de 2 mm. L'interfrange est 0,34 mm. En reculant l'écran de 50cm, l'interfrange devient 0,51 mm. En déduire la longueur d'onde λ de la lumière utilisée.

SOLUTION :

D'après l'expression de l'interfrange i en fonction de λ , la longueur d'onde de la lumière d , la distance entre les trous et l'écran et a , la distance entre les deux trous :

$$i = \lambda d/a$$

On peut écrire :

$$i_2 = \lambda(d + 0,5)/a$$

$$i_1 = \lambda d/a$$

En soustrayant membre à membre ces deux équations, on a :

$$i_2 - i_1 = 0,5 \lambda/a$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 2a(i_2 - i_1) = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} (0,5 - 0,34) \cdot 10^{-3} \\ &= 0,64 \text{ micron (rouge)} \end{aligned}$$



Ex. - 2 - :

On place une fente F lumineuse parallèle à l'arête O de deux miroirs de Fresnel à une distance $r=80\text{cm}$ de celle-là.

1) Quel est l'angle α des deux miroirs si on veut avoir une distance $a=2 \text{ mm}$ entre les deux images virtuelles de la fente.

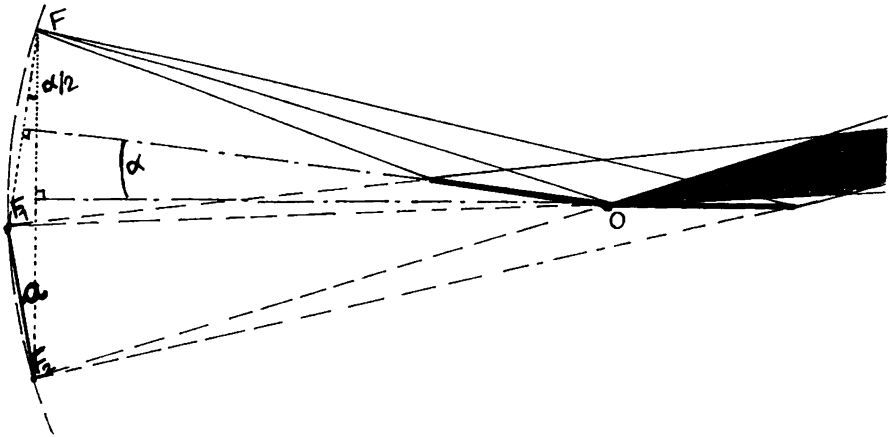
2) Si la longueur d'onde de la radiation $\lambda=0,6\mu$, trouver l'interfrange sur un écran à 40cm.

SOLUTION :

1) On a dans le cercle de centre O et de rayon OF :

$$\alpha = a/2r = 2 \cdot 10^{-3} / 20,8$$

$$\alpha = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \simeq 4,3 \text{ minutes.}$$



2) L'interfrange est égale à :

$i = \lambda d/a$ où d est la distance entre
l'écran et les images de la
fente :

$$i = 0,6 \cdot 10^{-6} \cdot (0,8 + 0,4) / 2 \cdot 10^{-3}$$

$$i = 0,36 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



Ex. - 3 - :

Un biprisme d'indice 1,5 et d'angle utile 10 minutes, reçoit d'une fente-source S , parallèle aux arêtes, située dans le plan de symétrie, à 50cm de l'appareil, une lumière de longueur d'onde unique $0,5\mu$. Calculer l'interfrange à 2 m de la source. (1 minute = $3 \cdot 10^{-4}$ radian).

SOLUTION :

La déviation D du rayon provenant de la source, par chaque prisme est :

$$D \cong (n-1)A$$

où : $n = 1,5$ et $A = 10$ minutes

$$D \approx 15'$$

L'angle au centre $S_1OS_2 = 30$ minutes = $9 \cdot 10^{-3}$ rad.

d'où $a = 9 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 = 4,5$ mm

et enfin :

$$i = \lambda d/a$$

$$= 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 / 4,5 \cdot 10^{-3}$$

$$i = 0,22 \text{ mm}$$

Ex. - 4 - :

On réalise l'expérience d'Young à l'aide de deux fentes étroites, parallèles A et B distantes de 1 mm, éclairées par une source éloignée qui émet de la lumière monochromatique de longueur d'onde $0,5\mu$. On observe les franges produites sur un écran placé parallèlement au plan des fentes A et B, à 1 m de distance.

Déterminer la distance à la frange centrale, de la 5e frange sombre.

SOLUTION :

On a :

$$i = \lambda d/a = 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1/10^{-3} = 0,5 \text{ mm}$$

La distance entre la frange centrale et la 5e frange sombre est telle que :

$$d = 4,5 i = 2,25 \text{ mm}$$



Ex. - 5* :

Deux fentes fines et parallèles F_1 et F_2 , perpendiculaires au plan de la figure sont éclairées, en lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda=0,546\mu$, par une fente lumineuse F qui leur est parallèle. F est située à égale distance de F_1 et de F_2 . Un écran plan E, parallèle au plan contenant F_1 et F_2 est placé à 2 m de ce dernier, comme l'indique la figure.



- 1) Décrire succinctement le phénomène observé sur l'écran E et préciser l'orientation des franges.
- 2) Calculer la distance entre deux franges brillantes consécutives sachant que la distance $F_1 F_2$ est égale à 1 mm.
- 3) Quelle devrait être la distance entre F_1 et F_2 pour que l'interfrange reste la même que dans la deuxième question quand on opère avec une radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda=0,436$ micron ?

SOLUTION :

1) Partant de F_1 et F_2 deux rayons lumineux arrivent en un point M avec un déphasage (différence de marche). Ce déphasage peut varier de zéro à π . Dans le premier cas M est un point lumineux, dans le deuxième cas, il est sombre.

On dit qu'il y a formation de franges d'interférences.

La distance entre deux points lumineux (ou sombres) est appelée inter-frange et est égale à :

$$i = \lambda d/a$$

La direction des franges est celle de F, perpendiculaire au plan.

2) $i = \lambda d/a$

$$= 0,546 \cdot 10^{-6} \cdot 2/10^{-3}$$

$$i = 1,092 \text{ mm}$$

3) $a' = \lambda' d/i$

$$= 0,436 \cdot 10^{-6} \cdot 2/1,092 \cdot 10^{-3}$$

$$a' = 0,79 \text{ mm}$$



Ex. - 6* :

Une lentille convergente de 30cm de distance focale a été coupée en deux suivant un diamètre. Les deux moitiés recollées sont séparées par une distance de 0,5 mm.

1) Une source lumineuse ponctuelle monochromatique A ($\lambda = 0,6\mu$) est située à 60cm de la lentille, sur l'axe principal. Décrire le phénomène observé sur un écran perpendiculaire à cet axe, situé à 2 m de la lentille, du côté opposé à la source. Calculer la distance qui sépare le milieu de la frange centrale du milieu de la 7e frange noire.

2) Comment le phénomène est-il modifié si la source émet une lumière complexe, constituée par deux radiations de longueurs d'onde $0,6\mu$ et $0,7\mu$?

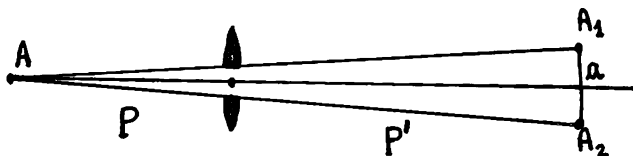
3) A quelle distance de la frange centrale les maximums de lumière correspondant à chacune des deux radiations précédentes coïncident-ils à nouveau ?

SOLUTION :

1) La lentille ainsi coupée et recollée, va donner de A deux images réelles A_1 et A_2 :

On a d'après la formule des lentilles $\frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = \frac{1}{f}$

$$P' = 0,6 \text{ m}$$



On peut donc calculer a , la distance $A_1 A_2$:

$$a = 0,5 \frac{P + P'}{P} = 1,5 \text{ mm}$$

Si la radiation est de $0,6\mu$

$$i = \lambda d/a = 0,6 \cdot 10^{-6} \cdot 1,4/1,5 \cdot 10^{-3} \\ = 0,56 \text{ mm}$$

La distance entre la frange centrale et la 7e noire :

$$\ell = 6,5 \cdot 0,56 = 3,64 \text{ mm}$$

2) L'interfrange i' pour $\lambda = 0,7\mu$ sera :

$$i' = \lambda d/a = 0,7 \cdot 10^{-6} \cdot 1,4/1,5 \cdot 10^{-3} \\ i' = 0,65 \text{ mm}$$

Les frange lumineuses de ces deux radiations vont s'intercaler.

3) Considérons le point où les deux franges lumineuses correspondant aux deux radiations coïncident pour la première fois. Ce point se trouve de la frange centrale, à une distance ℓ' . Or ℓ' sera égale à :

$$\ell' = n \cdot 0,56 = (n-1)0,65 \\ \text{d'où : } n = 7 \\ \text{et } \ell' = \underline{\underline{\underline{\underline{3,9 \text{ mm}}}}}$$



Ex. - 7* :

Une lentille mince convergente, de distance focale 50cm, est coupée en deux parties égales par un plan passant par l'axe principal. Une fente lumineuse S très fine est située dans ce plan et disposée parallèlement à la ligne de séparation des deux moitiés de la lentille. Son milieu est sur l'axe principal, à 1 m de la lentille. Elle émet une radiation monochromatique :

1) De quelle longueur doit-on écarter les deux moitiés de la lentille, symétriquement de part et d'autre de l'axe, pour obtenir deux images, S_1 et S_2 , éloignées de 5 mm l'une de l'autre ?

Cette opération étant effectuée, on considère un plan E , normal à l'axe, à 3 m des sources S_1, S_2 . Quelle est la largeur de la région de ce plan où l'on peut observer des franges d'interférences ? On mesure la distance du milieu d'une frange brillante au milieu de la 20e frange brillante à droite (ou à gauche) de celle dont on est parti ; on trouve 8,19 mm. Quelle est la longueur d'onde de la radiation utilisée ?

2) On place devant l'une des sources (S_1, S_2) une lame de verre d'épaisseur 0,008 mm et d'indice 1,5 pour la radiation mono-

chromatique considérée :

Quels sont le sens et la valeur, de la translation subie par le système de franges ?

3) On enlève la lame de verre et on éclaire maintenant la fente lumineuse S avec une source émettant toutes les radiations dont les longueurs d'onde sont toutes comprises entre $0,650\mu$ et $0,410\mu$:

Quelles sont les longueurs d'onde de celles de ces radiations qui donnent une frange obscure dans le plan d'observation précédent en un point A écarté de 3 mm de l'axe ?

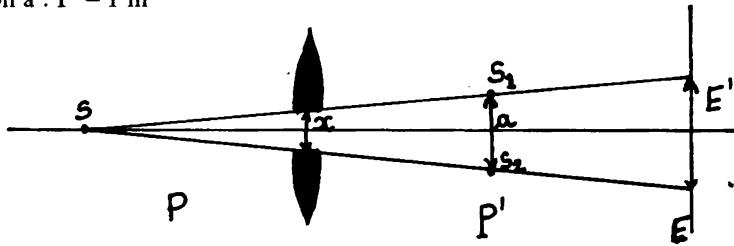
SOLUTION :

1) Calculons la position des sources, images S_1 et S_2 par rapport à la lentille, on a :

$$1/P + 1/P' = 1/f$$

avec : $P = 1$ m, position de la fente ; $f = 0,5$ m, distance focale.

On a : $P' = 1$ m



Ainsi, on a :

a) $x = a/2$ (triangles homothétiques)

$$x = 2 \text{ mm}$$

b) $E' = 5/2.a$ (triangles homothétiques)

$$E' = 10 \text{ mm}$$

c) 20 interfranges mesurent 8,19 mm. Donc on peut écrire :

$$20 i = 20. \lambda. d/a = 8,19$$

$$\text{d'où : } \lambda = 8,19.a/20.d = 0,546 \text{ microns.}$$

2) Si on place la lame au voisinage de S_1 , il y a déplacement dans le sens du demi-plan où se trouve S_1 . Ce déplacement est égal à :

$$x_0 = (n-1)ed/a$$

$$x_0 = 0,5.0,008.10^{-3}.3/4.10^{-3}$$

$$x_0 = \underline{\underline{3 \text{ mm}}}$$

3) L'abscisse x d'un point M obscur pour une radiation λ donnée est telle que :

$$x = \left(\frac{2K + 1}{2} \right) \cdot \frac{\lambda d}{a} \quad K = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

si $x = 3 \text{ mm}$ et $0,650 \geq \lambda \geq 0,410 \text{ microns}$

donc K doit remplir les conditions suivantes :

$$\frac{2ax - \lambda_2 d}{2\lambda_2 d} \geq K \geq \frac{2ax - \lambda_1 d}{2\lambda_1 d}$$

où $\lambda_1 = 0,650$ et $\lambda_2 = 0,410$

d'où en prenant les valeurs entières pour K :

$$6 \geq K \geq 9$$

Les longueurs d'onde des radiations qui sont obscures en M tel que $x = 3 \text{ mm}$, seront :

$$\lambda = \frac{2ax}{d(2K+1)}$$

$$K = 6 \quad \lambda = 2.4.3.10^{-6} / 3.13 = 0,615 \text{ microns}$$

$$K = 7 \quad \lambda = 2.4.3.10^{-6} / 3.15 = 0,533 \text{ microns}$$

$$K = 8 \quad \lambda = 0,470 \text{ microns}$$

$$K = 9 \quad \lambda = 0,421 \text{ microns}$$



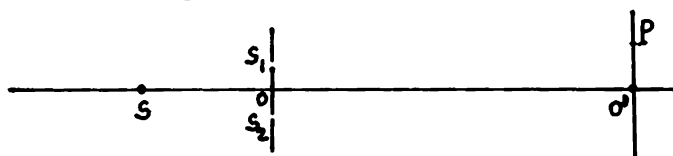
Ex. - 8* :

On utilise le dispositif des trous d'Young pour produire des franges d'interférences. Les deux trous S_1 et S_2 distants de $0,4 \text{ mm}$, sont éclairés par une source monochromatique S de longueur d'onde $0,5\mu$, équidistante de S_1 et de S_2 . L'écran d'observation est perpendiculaire en O' à la droite SO , O étant le milieu de $S_1 S_2$. La distance OO' est 1 m .

1) Décrire le phénomène observé et calculer la distance $O'P$ pour laquelle on observe la quatrième frange brillante.

2) On remplace la source monochromatique par une source de lumière blanche. Décrire le nouvel aspect de l'écran. Déterminer les radiations lumineuses supprimées au point P .

3) On place devant la fente S_1 une lame de verre d'épaisseur 8μ et d'indice $3/2$. Déterminer la nouvelle position de la frange centrale. Comment la distingue-t-on facilement ?



4) Dans quel sens et de combien faudrait-il déplacer S pour ramener la frange centrale en O' ? La distance SO est 60 cm.

SOLUTION :

1) Vu la nature vibratoire de la lumière, en un point M(x) de l'écran, on peut avoir :

a) soit une amplitude maximale (franges brillantes) si la différence de marche est un multiple entier de la longueur d'onde (vibration en phase).

b) soit une amplitude nulle (franges obscures) si la différence de marche est un multiple entier impair de la demi-longueur d'onde (vibration en opposition de phase).

Ainsi sur l'écran, on observe des franges brillantes et obscures qui s'intercalent. La distance entre deux milieux brillants (ou obscurs) est appelée interfrange. Elle est égale :

$$i = \frac{\lambda d}{a} \quad (d : \text{distance } OO', a = S_1 S_2)$$

La distance x de la *én*ième frange est telle que :
(La centrale est de l'ordre zéro).

$$x = n \frac{\lambda d}{a} = 4,0,5 \cdot 10^{-6} / 0,4 \cdot 10^{-3} \\ = 5 \text{ mm}$$

2) Si la source S est blanche (tout le spectre visible), on aura en O' une frange brillante et de part et d'autre, des franges de différentes couleurs, moins brillantes que la centrale, qui vont se juxtaposer. Le spectre de lumière visible est compris entre 0,4 et 0,75 microns. Au point P d'abscisse 5 mm, les radiations obscures sont les radiations d'ordre K, qui remplissent les conditions suivantes :

$$\frac{2ax - \lambda_2 d}{2\lambda_2 d} \geq K \geq \frac{2ax - \lambda_1 d}{2\lambda_1 d}$$

$$\text{où } \lambda_1 = 0,75 \cdot 10^{-6}, \quad \lambda_2 = 0,4 \cdot 10^{-6}, \quad d = 1 \text{ m}, \\ a = 0,410^{-3}, \quad x = 5 \text{ mm}$$

$$4 \geq K \geq 3 \quad (K \text{ est entier})$$

Les radiations obscures en P seront :

$$\lambda = \frac{2ax}{d(K+1)} \quad \text{avec } K = 3, 4$$

$$K = 3 \quad \lambda = 0,571 \text{ microns.}$$

$$K = 4 \quad \lambda = 0,444 \text{ microns.}$$

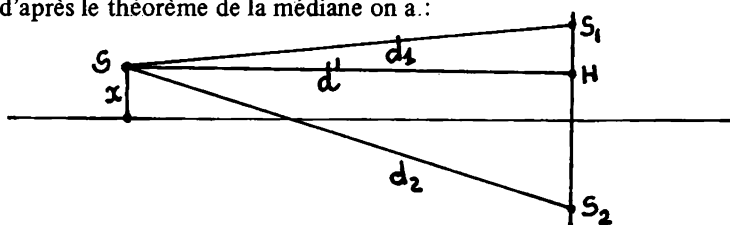
3) La frange centrale, qu'on reconnaît à sa forte intensité et comme étant la seule blanche, se déplacera d'une distance x_0 du côté de S_1 telle que :

$$x_0 = (n-1)ed/a \quad (e, \text{ épaisseur de la lame}).$$

$$x_0 = 0,5.8.10^{-6} \cdot 1/0,4.10^{-3}$$

$$x_0 = 10 \text{ mm.}$$

4) Placer une lame de verre entre S_1 et l'écran, a le même effet qu'un allongement du chemin $S_1 P$ égal à : $e(n-1)=0,4$ micron. On doit donc rapprocher S de S_1 d'une distance x qu'on peut calculer comme suit : d'après le théorème de la médiane on a :



$$d_2^2 - d_1^2 = 2 \cdot S_1 S_2 \cdot OH = 2ax$$

or :

$$d_2 - d_1 = \frac{2ax}{d_2 + d_1} \approx \frac{2ax}{2d'} = \frac{ax}{d'} = e(n-1) = 0,4.10^{-6}$$

$$\text{d'où : } x = \frac{0,4.10^{-6} \cdot 0,6}{0,4.10^{-3}} = \underline{\underline{0,6 \text{ mm.}}}$$



Ex. - 9* :

On observe les phénomènes d'interférence produits par deux sources lumineuses ponctuelles S_1 et S_2 sur un écran E dont le plan est parallèle à la droite $S_1 S_2$. La distance des deux sources est $S_1 S_2 = a$; leur distance à l'écran est $OO' = D$.

1) Les deux sources S_1, S_2 sont des sources synchrones monochromatiques, de longueur d'onde λ ; on demande l'expression de la distance x d'une frange noire à la frange centrale O' . Calculer l'intervalle de deux franges noires consécutives pour $a=1 \text{ mm}$, $D=1\text{m}$, $\lambda=0,592 \text{ microns}$.

2) Les deux sources synchrones S_1, S_2 contiennent deux radiations monochromatiques, de longueurs d'onde λ et λ' . Chercher la condition pour qu'il y ait obscurité complète en un point M de l'écran, à une distance x de la frange centrale O' . Calculer la plus petite valeur de x satisfaisant à cette condition pour : $a=1\text{mm}$; $D=1\text{m}$; $\lambda=0,592\mu$; $\lambda'=0,560\mu$.

SOLUTION :

1) La différence de marche entre deux rayons S_1M et S_2M arrivant en M (x) est :

$$\Delta = ax/D$$

Si cette différence de marche est égale à : $(2K+1)\lambda/2$; au point M, on a une frange obscure ; ainsi x sera égale à :

$$x = \frac{2K+1}{2} \cdot \frac{\lambda D}{a}$$

L'intervalle entre deux franges successives et de même nature est égal à, (k=0, K=1 par exemple) :

$$i = \lambda D/a$$

ici on a : $i = 0,592 \text{ mm}$

2) Pour avoir un point M(x) obscur pour les deux irradiations, on a :

$$x = \frac{2K'+1}{2} \cdot \frac{\lambda' D}{a} = \frac{2K+1}{2} \cdot \frac{\lambda D}{a}$$

qui peut s'écrire après simplification :

$$(2K'+1) \lambda' = (2K+1) \lambda$$

Si on pose pour la première coïncidence :

$$K' = K + 1$$

on tire :

$$K = \frac{3\lambda' - \lambda}{2(\lambda' - \lambda)} = 17$$

Ainsi, le premier point où les deux radiations sont obscures simultanément, est tel que :

$$x = \frac{35.0,59210^{-3}}{2} = \frac{37.0,56010^{-3}}{2} = \underline{\underline{\underline{10,36 \text{ mm}}}}$$



Chapitre treizième

COURANT ALTERNATIF

Ex. - 1 - :

Un solénoïde de longueur $\ell' = 50\text{cm}$ et de diamètre 10cm , est formé de spires jointives d'un fil de 1 mm de diamètre et de résistivité 10^{-6} ohm-mètre . Calculer :

- 1) sa résistance ohmique R ,
- 2) son inductance L ,
- 3) L'expression de la f.e.m d'auto-induction dont il est le siège si l'intensité du courant qui le traverse est de la forme $i = 2t^2 + 5t$,
- 4) donner la valeur de cette f.e.m 2s après l'instant initial $t = 0$.

SOLUTION :

- 1) La résistance du fil constituant le solénoïde est :

$$R = \rho \ell / s$$

$$\text{où } \rho = 10^{-6} \text{ ohm-mètre}$$

$$\ell = \pi \cdot D \cdot N$$

avec D : diamètre du solénoïde égal à $0,1\text{ m}$

N : nombre de spires, égal à :

$$N = \frac{\ell'}{d} = \frac{0,5}{10^{-3}} = 500$$

$$\text{et } s = \pi d^2 / 4$$

$$\text{d'où } R = 10^{-6} \cdot 4 \cdot 0,1 \cdot 500 / 10^{-6} = \underline{\underline{200 \text{ ohms}}}$$

- 2) Le champ magnétique dans un solénoïde est égal à :

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N}{\ell'} \cdot I$$

Le flux qui le traverse s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi &= N \cdot B \cdot S = L \cdot I \\ &= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N^2 \pi D^2}{4 \ell'} \cdot I \end{aligned}$$

$$\text{d'où } L = \frac{4\pi^2 \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 0,5}$$

$$L = 5 \text{ mH}$$

3) On sait que la f.e.m d'auto-induction s'écrit :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

$$e = -5 \cdot 10^{-3} (4t+5)$$

4) Pour $t=2s$, on a :

$$e = -\underline{\underline{65 \cdot 10^{-3} \text{ V}}}$$



Ex. - 2 - :

Une bobine plate de 5 spires et de rayon $r=4\text{cm}$, tourne à raison de 3000 t/mn dans un champ magnétique B de 1 tesla normal à l'axe de rotation.

Donner l'expression de la f.e.m induite dans cette bobine.

SOLUTION :

Le flux qui traverse la bobine s'écrit :

$$\phi = N \cdot B \cdot S \cdot \cos\alpha$$

où, α : l'angle entre la normale et le champ. Il est variable dans le temps suivant :

$$\alpha = \omega t$$

$$\text{où } \omega = \frac{3000 \cdot 2\pi}{60} = 100\pi \text{ rad/s}$$

Ainsi :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{d(N \cdot B \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \cos\omega t)}{dt}$$

$$e = 5 \cdot 1 \cdot \pi \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 100\pi \cdot \sin(100\pi t)$$

$$e = 8 \sin(100\pi t)$$



Ex. - 3 - :

Pour mesurer le coefficient d'inductance d'une bobine, on applique aux bornes de cette dernière une tension alternative de 120 volts efficaces à 50 périodes par seconde ; il y circule un courant de 15 ampères efficaces. Alimentée sous une tension continue de 24 V, il y circule un courant de 8 ampères, continu.

Quelle est la valeur du coefficient L d'inductance ?

SOLUTION :

L'impédance de la bobine est égale à :

$$\begin{aligned} Z &= U_e / I_e \\ &= 120 / 15 = 8 \, \Omega \end{aligned}$$

$$\text{sa résistance : } R = \frac{U}{I} = \frac{24}{8} = 3 \, \Omega$$

On sait que pour une bobine, on a :

$$Z^2 = L^2 \omega^2 + R^2$$

avec $\omega = 100\pi$ rad/s, on tire son coefficient d'induction :

$$L = 23,4 \, \text{mH}$$



Ex. - 4* :

1) Entre deux points P et Q on maintient une différence de potentiel sinusoïdale qui est exprimée, en volts, par l'équation : $V = 141,4 \sin \omega t$. La pulsation ω est égale à 314. Quelles sont la fréquence et la valeur efficaces de cette tension.?

2) On relie P et Q par une résistance pure r, et une bobine B, montées en série. L'intensité efficace du courant qui parcourt ce circuit est $I_1 = 10$ ampères. La différence de potentiel efficace aux bornes de r est 20 volts. Quelle est la résistance de r ?

3) La résistance de la bobine B est 6 ohms.

a) à partir de la différence de potentiel efficace entre P et Q et de l'intensité efficace, calculer l'impédance du circuit PQ.

b) à partir de l'impédance du circuit PQ, calculer la valeur L (Henrys) du coefficient de self-induction de B.

c) quel est le facteur de puissance de B et celui du circuit PQ ?

SOLUTION :

1) La fréquence est égale à : $N = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$

La tension efficace $V_e = V_m / \sqrt{2} = 100 \text{ V}$

2) $r = V_e / I_e = 20/10 = 2 \text{ ohms}$

3) a) L'impédance du circuit est :

$$Z = V_e / I_e = 100/10 = 10 \text{ ohms}$$

b) L'impédance totale du circuit s'écrit :

$$Z^2 = L^2 \omega^2 + (R + r)^2 ; \text{ où } R : \text{résistance de la bobine}$$

$$100 = L^2 (314)^2 + 64$$

$$L^2 \omega^2 = 36$$

$$L \approx 20 \text{ mH}$$

c) Le facteur de puissance de B est :

$$\cos \phi = \frac{6}{\sqrt{36+36}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \phi = 45^\circ$$

Le facteur de puissance de PQ est :

$$\cos \phi = \frac{R+r}{Z} = \frac{6+2}{10} = 0,8$$

$$\phi \approx 36^\circ$$



Ex. - 5* :

Entre deux bornes on établit une différence de potentiel sinusoïdale de tension efficace $V_e = 20 \text{ volts}$ et de fréquence $N = 50$ périodes par seconde. Ces grandeurs sont supposées constantes dans tout ce qui suit :

On les réunit par un circuit comprenant en série la bobine d'un petit électro-aimant E et une résistance non inductive $r = 5 \text{ ohms}$.

1) L'électro-aimant est placé de manière à pouvoir attirer en son milieu une corde de fer tendue entre deux points fixes distants de 1 m dans un plan horizontal. La section droite de la corde est un cercle de diamètre $d = 0,5 \text{ mm}$ et la masse spécifique du métal est égale à $7,7 \text{ g/cm}^3$.

Quelle doit être la tension de la corde pour qu'elle vibre en un fuseau avec l'amplitude maximale ?

2) La résistance non inductive ($r = 5 \text{ ohms}$) est plongée dans un calorimètre. On constate ainsi que le passage du courant produit, dans cette résistance, un dégagement de chaleur de 5270 calories en un

quart d'heure. Quelle est l'intensité efficace I du courant ?

3) On mesure les différences de potentiel efficaces : V_1 aux bornes de r d'une part et V_2 aux bornes de la bobine d'autre part, pendant le passage du courant. On trouve $V_1 = V_2$.

Indiquer la valeur et le sens du déphasage ϕ qui existe entre le courant i et la différence de potentiel v prise entre les bornes à chaque instant. D'où provient ce déphasage ?

Quelle est l'expression, en fonction du temps, de la valeur instantanée i sachant que v est donné par la formule $v = V_0 \sin \omega t$?

4) Calculer le déphasage ϕ entre le courant i et la différence de potentiel instantanée v' aux bornes de l'électro-aimant. En déduire la valeur de la résistance r' et du coefficient de self-induction L de l'électro-aimant, dans ces conditions d'emploi.

SOLUTION :

1) La longueur d'onde des vibrations, sera donc 2 m, afin d'avoir un seul fuseau.

D'autre part : $\lambda = v/N$ où $v = \sqrt{T/\mu}$

avec v : vitesse de propagation,

T : tension de la corde,

μ : masse linéaire, qui pour cette corde (1m) aura pour expression :

$$\begin{aligned}\mu &= \rho \cdot s \\ &= \rho \cdot \pi \cdot d^2 / 4\end{aligned}$$

Ainsi, on aura : $T = \lambda^2 N^2 \mu$

$$= \lambda^2 N^2 \rho \pi d^2 / 4$$

$$T = 4.25.10^2 \cdot 7.7.10^3 \cdot 3.14.25.10^{-8} / 4 \cong 15 \text{ N}$$

2) La loi de Joule nous permet d'écrire : $I^2 = 4.18.Q/rt$

$$I^2 = 4.18.5270 / 5.15.60$$

$$I = 2.21 \text{ A}$$

3) On a : $V_1 = V_2 = r \cdot I = 11 \text{ V}$

Le courant i est en retard ($\phi < 0$) par rapport à la tension v , prise comme origine.

Pour calculer ϕ , construisons le diagramme de Fresnel pour les valeurs efficaces.

Dans le triangle rectangle ODB on a :

$$\cos \phi = \frac{v/2}{v_1} = \frac{10}{11}$$

$$\phi \cong 25^\circ \cong 0,44 \text{ rad.}$$

Ce déphasage est dû à la présence d'une bobine dans le circuit :

$$i = 3,12 \sin(100\omega t - 0,44)$$

4) Le déphasage ϕ' entre le courant i et v' tension aux bornes de l'électro-aimant est égal à $2\phi = \phi' \cong 50^\circ \cong 0,88 \text{ rad.}$

La tension aux bornes de r' , résistance de la bobine de l'électro-aimant est à (triangle OAC) :

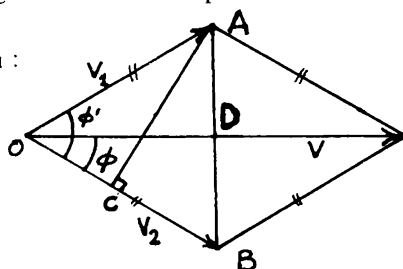
$$V_2 \cdot \cos \phi' = 11 \cdot \cos 0,88 \cong 7,18 \text{ v}$$

$$\text{d'où } r' = 7,18 / 2,21 = 3,25 \text{ ohms}$$

Le calcul de L , coefficient de self-induction de la bobine peut être tiré du triangle OAC pour lequel on peut écrire :

$$V_2^2 = 7,18^2 + I^2 L^2 \cdot 10^5 = 121 \quad (\pi^2 \approx 10)$$

$$\text{d'où } L \cong \underline{\underline{12 \text{ mH}}}$$



Ex. - 6* :

Un condensateur peut être assimilé à deux feuilles métalliques séparées par un isolant d'épaisseur 0,25 mm et de constante diélectrique 4 ; la surface utile des feuilles métalliques est 25 m².

Quelle est la capacité de ce condensateur ? En associant dix condensateurs analogues en parallèle, quelle est la capacité C de la batterie obtenue ?

2) Un circuit comprenant en série la batterie C , une self variable L et un ampèremètre thermique A , est soumis à une tension alternative de 50 périodes, dont la valeur efficace $V=110$ volts. Les résistances au passage d'un courant continu sont respectivement 10 ohms pour la self, 5 ohms pour l'ampèremètre. Sachant que dans ce circuit, l'intensité efficace I atteint sa valeur maximale, préciser les valeurs numériques de L et I .

3) Pour quelles valeurs de la self, l'intensité indiquée par l'ampèremètre devient-elle moitié de celle calculée précédemment ? Donner, en vous aidant des calculs qui précèdent, l'allure de la courbe représentant les variations de l'intensité I en fonction de la self L .

4) Calculer les tensions efficaces aux bornes de la batterie C , de la self L , de l'ampèremètre A quand l'intensité est maximale. Si la capacité de la batterie devenait $C/2$ et la valeur de la self $2L$, que deviendraient les tensions efficaces aux bornes de la batterie de condensateurs et de la self ?

SOLUTION :

1) On sait que la capacité d'un condensateur est égale à :

$$C = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ K.S/e}$$

avec $K = 4$

$$S = 25$$

$$e = 25 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{On a : } C_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 25 / 25 \cdot 10^{-5}$$

$$C_0 = 3,54 \mu\text{F}$$

La batterie de 10 condensateurs en parallèle aura pour capacité :

$$C = 10 C_0 = 35,4 \mu\text{F}$$

2) Le circuit ainsi constitué et alimenté, est en résonance, donc :

$$L_0 C \omega^2 = 1$$

avec $\omega^2 = 10^5$

$$C = 35,4 \cdot 10^{-6}$$

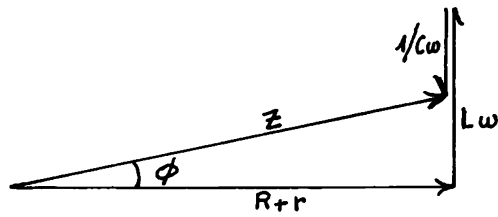
$$L_0 = 0,28 \text{ Henry}$$

Dans ce cas, la tension efficace totale est égale à celle aux bornes de la résistance équivalente du circuit, d'où :

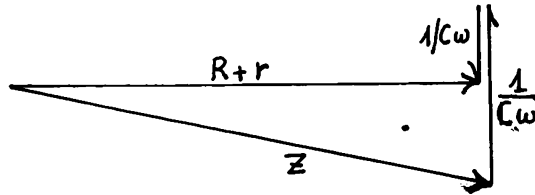
$$I_0 = \frac{V}{(R+r)} = \frac{110}{15} = 7,33 \text{ A}$$

3) Si l'intensité devient égale à la moitié de ce qu'elle était, l'impédance est double. C'est-à-dire égale à 30 ohms.

Le diagramme de Fresnel pour les impédances peut avoir deux représentations :



Circuit selfique



Circuit capacitif

a) cas où $L\omega > 1/C\omega$ (circuit selfique $L > L_0$) : d'après le diagramme on a :

$$L\omega - 1/C\omega = 30 \sin \phi \approx 26$$

Ici ϕ est égal à 60° , vu que son cosinus est égal à 0,5. Ainsi :

$$L = 1/C\omega^2 + 26/\omega = L_0 + 26/\omega$$

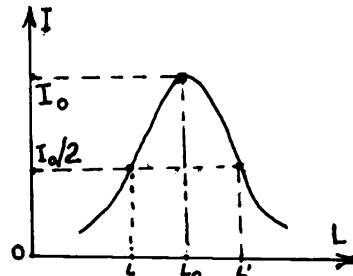
$$L = 0,28 + 0,08 = 0,36 \text{ Henry}$$

b) cas où $L\omega < 1/C\omega$ (circuit capacitif)

$$1/C\omega - L'\omega \approx 26$$

$$L' = 1/C\omega^2 - 26/\omega = L_0 - 26/\omega$$

$$L' = 0,28 - 0,08 = 0,20 \text{ Henry}$$



La courbe $I(L)$ est en forme de cloche, symétrique par rapport à L_0 .

4) Si $I = 7,33 \text{ A}$, on a :

Les tensions efficaces aux bornes de C et L qui sont égales s'écrivent :

$$V = I/C\omega = IL\omega = 650 \text{ v}$$

La tension aux bornes de l'ampèremètre sera :

$$V' = 5,733 = 36,6 \text{ v}$$

Si la capacité devient $C/2$ et la self devient $2L$, la relation de la résonance est toujours vérifiée :

$$2L \cdot C/2 \cdot \omega^2 = LC\omega^2 = 1$$

Le courant est toujours le même (7,33 A) et les tensions aux bornes de la capacité et de la self seront multipliées par 2. (1300 v).



Ex. - 7*:

Un circuit comprend en série, un alternateur, une lampe de résistance 20 ohms et une bobine dont la résistance R et l'inductance L sont inconnues. Les différences de potentiel mesurées au voltmètre thermique, sont respectivement :

- aux extrémités de la lampe : 50 V
- aux extrémités de la bobine : 70 V
- aux bornes de l'alternateur : 97 V

On demande de calculer :

- 1) l'intensité du courant
- 2) la résistance R de la bobine
- 3) l'inductance L de la bobine
- 4) la puissance absorbée par la lampe, la puissance absorbée par la bobine, la puissance de l'alternateur
- 5) Le facteur de puissance du circuit

La fréquence du courant qui circule dans ce circuit est : $N=50$ Hz.

SOLUTION :

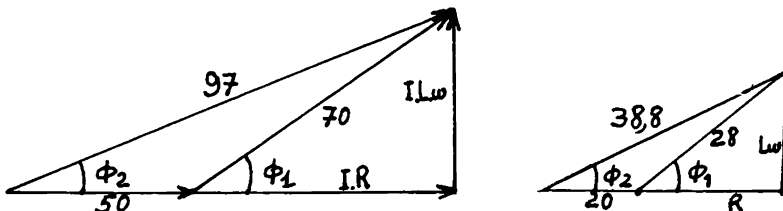
- 1) L'intensité du courant peut être calculée à partir de la tension de la lampe de résistance r :

$$I = U/r = 50/20 = 2,5 \text{ A}$$

de là, on peut déduire les valeurs suivantes :

- l'impédance totale : $Z_1 = 97/2,5 = 38,8$ ohms
- l'impédance de la bobine : $Z_2 = 70/2,5 = 28$ ohms

- 2) et 3) On peut donc construire les deux diagrammes de Fresnel, celui des tensions et celui des impédances :



Le diagramme des impédances permet d'écrire :

$$R^2 + L^2 \omega^2 = 784 \quad (1)$$

$$(20+R)^2 + L^2 \omega^2 = 1505,44 \quad (2)$$

En soustrayant (1) de (2), on a :

$$R = 8 \text{ ohms}$$

4) En portant cette valeur dans (1), on a :

$$L \simeq 85 \text{ mH}$$

La puissance absorbée par la lampe :

$$P_1 = rI^2 = 125 \text{ W}$$

Puissance P_2 absorbée par la bobine sera :

$$P_2 = VI \cos \phi_1 \quad \text{où } \phi_1 : \text{déphasage entre tension et courant de la bobine.}$$

$$\begin{aligned} \cos \phi_1 &= R/Z_2 \\ &= 8/28 = 0,28 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P_2 = 70.2,5.0,28 \simeq 50 \text{ W}$$

La puissance fournie par l'alternateur P_3 est égale à :

$$P_3 = V.I.\cos \phi_2$$

où ϕ_2 : déphasage entre le courant et la tension de l'alternateur.

$$\cos \phi_2 = (r + R)/Z_1 = 28/38,8 = 0,72$$

$$\text{Donc : } P_3 = 97.2,5.0,72 \approx 175 \text{ W}$$

On vérifie bien que $P_3 = P_1 + P_2$ (conservation de l'énergie).

5) Le facteur de puissance sera :

$$\cos \phi = P/UI = 175/97.2,5 = 0,72$$



Ex. - 8 *

Deux bobines présentent une différence de potentiel sinusoïdale efficace de 120 volts et de fréquence $140/\pi$ Hz. Entre ces bornes on monte en série une bobine d'inductance L et de résistance 12,4 ohms, et une lampe à incandescence sans inductance et dont la résistance est de 83,6 ohms dans les conditions de l'expérience.

Cette lampe est plongée dans un calorimètre à circulation d'eau. On règle le débit de sorte que la différence de température entre l'eau qui arrive au fond du calorimètre et celle qui se déverse par le haut soit 2° exactement. Le débit est alors égal à 864 cm^3 par minute. Calculer :

- 1) l'intensité efficace du courant
- 2) l'intensité instantanée, en fonction du temps
- 3) l'impédance de l'ensemble : bobine et lampe
- 4) le facteur de puissance de l'ensemble
- 5) la différence de potentiel efficace aux bornes de la lampe

- 6) la différence de potentiel instantanée aux bornes de la lampe
 7) l'impédance de la bobine.

SOLUTION :

- 1) A partir de la loi de Joule, on peut écrire que :

$$0,24.R.I^2.t = mc.\Delta\theta$$

où $c=1$; $m=864g$; $\Delta\theta = 2^\circ C$; $R = 83,6 \Omega$; $t=60s$

$$I \approx 1,2 A$$

- 2) L'intensité instantanée du courant (prise comme origine) sera :

$$i=1,2\sqrt{2}\sin(140t/\pi)$$

$$i=1,7\sin(140t/\pi)$$

- 3) L'impédance de l'ensemble sera :

$$Z=V/I = 120/1,2 = 100 \Omega$$

- 4) Le facteur de puissance s'écrit :

$$\cos \phi = R/Z = 96/100 = 0,96$$

- 5) Aux bornes de la lampe la d.d.p efficace sera :

$$V_1 = 1,2.83,6 \approx 100,5 v$$

- 6) Aux bornes de la lampe la d.d.p instantanée sera :

$$V_1 = 1,7.83,6 \sin(140t/\pi)$$

$$V_1 = 142,12 \sin(140t/\pi)$$

- 7) D'après le diagramme de Fresnel des impédances, on a :

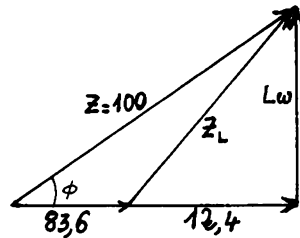
$$L^2.\omega^2 = 100^2 - (83,6 + 12,4)^2$$

$$L^2.\omega^2 = 784 \longrightarrow L\omega = 28 \text{ ohms}$$

et Z_L , l'impédance de la bobine

$$Z_L^2 = L^2.\omega^2 + 12,4^2$$

$$Z_L = 30,6 \text{ ohms}$$



Ex. - 9* :

L'intensité d'un courant alternatif est donnée à chaque instant par l'expression $i=22.\sin(314t)$. Ce courant parcourt un circuit comprenant une résistance $R=25$ ohms et une bobine d'inductance $L=0,016$ Henry.

- 1) Calculer la différence de potentiel aux bornes du circuit à chaque instant. Calculer les valeurs efficaces de la différence de potentiel aux

bornes et de l'intensité. Calculer la fréquence du courant.

2) On introduit dans le circuit un condensateur. Quelle doit être sa capacité pour que l'intensité du courant soit en phase avec la différence de potentiel aux bornes ?

3) Si l'intensité est toujours $i = 22 \sin(314t)$, quelle est alors l'expression de la différence de potentiel aux bornes du circuit ? Quelles sont les valeurs efficaces de la différence de potentiel U_1 aux bornes de la résistance, de la différence de potentiel U_2 aux bornes de la bobine et de la différence de potentiel U_3 aux bornes du condensateur ? Si la différence de potentiel aux bornes du circuit était constante, quelles seraient les valeurs U_1 , U_2 et U_3 ? Quelle serait alors la charge du condensateur ?

SOLUTION :

1) L'expression de la d.d.p instantanée s'écrit :

$$u = Z \cdot I_m \sin(314t + \phi)$$

$$\text{où } Z^2 = R^2 + L^2 \omega^2 \quad \text{donc } Z = 25,5 \, \Omega$$

$$\cos \phi = 25/25,6 \longrightarrow \phi = 0,2 \text{ rad}$$

avec $I_m = 22$, on a enfin :

$$u = 561 \sin(314t + 0,2)$$

La valeur efficace de la d.d.p sera :

$$V = 561/\sqrt{2} = 396,7 \text{ V}$$

La valeur efficace de l'intensité sera :

$$I = 22/\sqrt{2} = 15,55 \text{ A}$$

La fréquence du courant :

$$N = \omega/2\pi = 314/2\pi \approx 50 \text{ Hz}$$

2) Pour que la d.d.p et l'intensité soient en phase, il faut que le circuit soit en résonance, c'est-à-dire qu'on ait :

$$LC \cdot \omega^2 = 1$$

$$C = 1/0,016 \cdot 314^2 = 0,63 \text{ mF}$$

3) L'expression de la d.d.p aux bornes du circuit dans ce cas sera égale à celle aux bornes de la résistance :

$$u = RI_m \sin \omega t \quad (\phi = 0)$$

c'est-à-dire :

$$u = 550 \sin 314t$$

On a, à partir de la d.d.p efficace aux bornes de la résistance :

$$U_1 = 550 / \sqrt{2} = 389 \text{ v}$$

La d.d.p efficace aux bornes de la bobine et de la capacité :

$$U_2 = U_3 = I / C\omega = 78,12 \text{ v}$$

Si la d.d.p était constante (continue), on aurait :

$$I = 0, \text{ à cause de la présence du condensateur.}$$

On aura donc :

$$U_1 = U_2 = 0$$

Mais toute la tension sera appliquée aux bornes du condensateur, dont la charge sera :

$$Q = V.C = 0,63.10^{-3} . 396,7 = 0,25 \text{ coulombs.}$$



Ex. - 10* :

1) Un électro-aimant branché à une source de tension sinusoïdale est placé au voisinage du milieu d'un fil de fer de densité 7,5, de section $0,5 \text{ mm}^2$ placé horizontalement et fixé à une extrémité ; l'autre extrémité passe sur une poulie et est tendue par des poids. Le fil vibre alors en présentant un fuseau quand la tension exercée par les poids est de 150 N. La longueur du fil entre les deux points fixes est de 1 m.

a) Expliquer l'aspect du fil lors du passage du courant dans l'électro-aimant.

b) Calculer la fréquence du courant électrique.

2) Un circuit électrique comprend en série, une bobine d'inductance L et de résistance $r=10 \text{ ohms}$, avec une résistance pure, $R=50 \text{ ohms}$, immergée dans un calorimètre de valeur totale en eau 60 grammes.

a) Calculer l'intensité efficace de ce courant sachant que la température du calorimètre s'est élevée de 36^0 pendant 3 mn quand on branche ce circuit à une prise de tension sinusoïdale telle que $U=141,4 \sin 314t$.

b) Quelle est l'impédance du circuit ? En déduire l'inductance de la bobine.

c) Quel est alors le déphasage entre la tension aux bornes du secteur et l'intensité qui s'établit dans le circuit ?

d) Calculer la capacité du condensateur qu'il faudrait monter en série avec la bobine et la résistance pour annuler le déphasage entre la tension aux bornes du secteur et l'intensité dans le circuit.

Quelle serait alors la valeur de l'intensité efficace ?

SOLUTION :

1) a) le fil est le siège d'onde stationnaire, vibrant d'un seul fuseau, donc la longueur d'onde des vibrations est :

$$\lambda = 2 \text{ m}$$

b) la masse du fil qui sera aussi sa masse linéaire, est égale à :

$$\begin{aligned} m &= 7,5 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} \\ &= 3,75 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \end{aligned}$$

La vitesse de propagation s'écrit :

$$v = \sqrt{P/m}$$

et aussi :

$$v = \lambda \cdot N$$

$$\text{d'où } N^2 = P/\lambda^2 \cdot m = 150/4 \cdot 3,75 \cdot 10^{-3}$$

$$N = 100 \text{ Hz}$$

2) a) L'intensité efficace I du courant vérifie la relation suivante :

$$RI^2 t = mC \cdot \Delta \theta$$

avec $R = 50$; $t = 180$; $\Delta \theta = 36$; $mC = 60\text{g}$

$$I^2 = 60 \cdot 36 / 180 \cdot 50$$

$$I \cong 0,49 \text{ A}$$

b) L'impédance du circuit est :

$$Z = \frac{V}{I}, \text{ où } V \text{ est la tension efficace,}$$

$$V = 141,4 / \sqrt{2} = 100, \text{ donc :}$$

$$Z = 100 / 0,49 \cong 204,12 \text{ ohms}$$

On peut écrire :

$$Z^2 = L^2 \cdot \omega^2 + (50 + 10)^2 \quad \text{avec } \omega = 314$$

L'inductance L de la bobine sera égale à :

$$L = 0,62 \text{ Henry}$$

c) Le déphasage entre l'intensité et la tension est tel que :

$$\cos \phi = (R + r) / Z = 60 / 204,12 \cong 0,29$$

$$\phi \cong 1,27 \text{ rad} (73^\circ)$$

d) Dans ce cas le circuit est en résonance, et on a :

$$LC\omega^2 = 1$$

$$C = 1/L\omega^2$$

d'où $C = 16,4 \mu F$

La tension aux bornes du circuit sera égale à celle aux bornes de la résistance, d'où l'intensité efficace du courant :

$$I_0 = V/(R+r) = 100/60 = 1,66 \text{ A}$$



Ex. - 11* :

Un appareil électrique est constitué par une bobine de résistance R_1 et d'inductance L_1 . Il fonctionne normalement quand il est traversé par un courant alternatif sinusoïdal de fréquence $N=50$ Hz et d'intensité efficace $I=5$ A. Dans ce cas alors, la différence de potentiel entre ses bornes a pour valeur efficace $U_1=100$ V et présente par rapport à l'intensité du courant une différence de phase $\phi_1 = \pi/3$.

A. 1) Calculer : - l'impédance Z_1 de l'appareil
- les valeurs de R_1 et de L_1

2) Tracer le diagramme de Fresnel correspondant.

B. L'appareil peut être alimenté par l'une des 3 sources de tension sinusoïdales suivantes :

S : (fréquence $N=50$ Hz ; d.d.p efficace $U=173$ V)

S' : (fréquence $N=50$ Hz ; d.d.p efficace $U'=80$ V)

S'' : (fréquence $N=50$ Hz ; d.d.p efficace U'' inconnue).

I- On utilise la source S : pour que l'appareil fonctionne normalement on place, en série avec lui dans le circuit, une résistance non inductive R_2 .

1) Quelle valeur faut-il donner à R_2 ?

2) Tracer le diagramme de Fresnel correspondant au circuit.

3) Déterminer le déphasage entre le courant et la d.d.p. aux bornes de la source S.

II- On utilise la source S' : pour que l'appareil fonctionne normalement, on place, en série avec lui dans le circuit, un condensateur.

1) Quelle valeur faut-il donner à la capacité de ce condensateur ?

2) Tracer le diagramme de Fresnel correspondant au circuit.

III- On utilise la source S'' : quelle valeur doit avoir U'' et quelle capacité faut-il mettre en série avec l'appareil pour que ce dernier fonctionne normalement et que la tension aux bornes du circuit soit en phase avec le courant ?

N.B : Les parties I-II et III de B sont indépendantes.

SOLUTION :

$$A - Z_1 = U/I = 100/5 = 20 \text{ ohms}$$

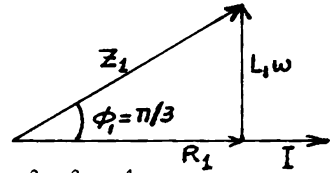
D'après le diagramme de Fresnel, on a :

$$a) R_1 = Z_1 \cos \phi = 20 \cos \pi/3 = 10 \Omega$$

$$b) Z_1^2 = R_1^2 + L_1^2 \omega^2 \longrightarrow 400 = 100 + L_1^2 \cdot \pi^2 \cdot 10^4$$

$$L_1 \cong 55 \text{ mH}$$

$$\text{et } L_1 \omega = 17,32 \Omega$$



B - I/ Dans le cas où c'est la source S qui alimente le circuit,
avec $U = 173 \text{ V}$ et $I = 5 \text{ A}$:

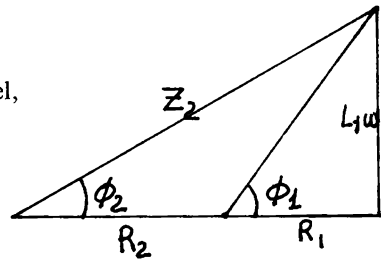
$$Z_2 = 173/5 = 34,6 \Omega$$

D'après le diagramme de Fresnel,
on peut écrire :

$$a) (R_2 + R_1)^2 + L_1^2 \omega^2 = Z_2^2$$

$$R_2^2 + 2R_1 R_2 = Z_2^2 - (R_1^2 + L_1^2 \omega^2) \\ = Z_2^2 - Z_1^2$$

$$R_2 = 19,9 \Omega$$



b) $\cos \phi_2 = (R_2 + R_1)/Z_2$, où ϕ_2 : déphasage entre la d.d.p de S et le courant.

D'après les résultats obtenus plus haut on a :

$$\phi_2 = 30^\circ = \pi/6$$

II/ Quand on utilise la source S' avec une tension efficace de 80 V et un courant toujours égal à 5 A , l'impédance totale sera :

$$Z_3 = 80/5 = 16 \Omega$$

Cette impédance peut s'écrire autrement :

$$Z_3^2 = R_1^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2$$

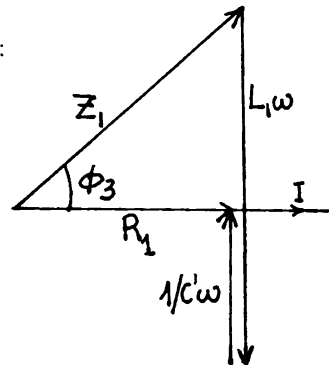
en posant $X = 1/C\omega$, on a :

$$X^2 - 2L\omega X + 144 = 0$$

Ce qui nous donne deux valeurs pour la capacité :

$$X' = 29,8 \Omega \longrightarrow C' = 0,1 \text{ mF}$$

$$X'' = 4,84 \Omega \longrightarrow C'' = 0,6 \text{ mF}$$

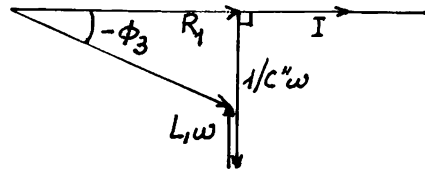


Dans le premier cas, le circuit est capacitif ($X > L_1 \omega$), dans le deuxième il est selfique ($L_1 \omega > X$).

Le déphasage entre la d.d.p de S' et le courant est le même au signe près

dans les deux cas

$$\begin{aligned}\cos \phi_3 &= (17,32 - 4,84)/10 = \\ &= (29,8 - 17,32)/10 = \\ \phi_3 &= \pm 51^\circ\end{aligned}$$



III/Si le courant et la tension U'' sont en phase, on a un cas de résonance :

$$L_1 \cdot C' \cdot \omega^2 = 1$$

$$\text{d'où } C' = 1/L_1 \omega^2 = 0,18 \text{ mF}$$

La tension aux bornes du circuit est égale à celle, aux bornes de la résistance :

$$V'' = R.I = 10 \cdot 5 = 50 \text{ V}$$



Ex. - 12* :

I— Une résistance non inductive R_1 et une bobine d'inductance L et de résistance négligeable sont placées en série. Une différence de potentiel sinusoïdale $u = U_m \sin \omega t$, de valeur efficace U et de fréquence f est appliquée aux bornes de l'ensemble.

a) Déterminer, par la construction de Fresnel, le déphasage entre la différence de potentiel appliquée et l'intensité qui s'établit dans le circuit.

b) Donner l'expression de la valeur instantanée i de l'intensité en fonction du temps. Application numérique : $R_1 = 100 \text{ ohms}$; $L = 1 \text{ Henry}$
 $f = 50 \text{ Hz}$; $U = 120 \text{ volts}$.

II— La même différence de potentiel $u = U_m \sin \omega t$ est appliquée maintenant aux extrémités d'un circuit comprenant une capacité C et une résistance R_2 placée en série. Répondre aux mêmes questions a, et b qu'au I. Application numérique : $R_2 = 3000 \text{ ohms}$; $C = 1/3\pi \cdot 10^{-5} \text{ Faraday}$.

III— On place ensuite en série avec la résistance R_1 et la bobine d'inductance L de la première question, une capacité variable C' et on applique entre les extrémités de la portion de circuit ainsi constitué la même tension que précédemment. En faisant varier la capacité, on observe que pour une certaine valeur C'_0 , l'intensité passe par une valeur maximale.

a) Déterminer cette intensité ainsi que la valeur C'_0 .

b) Calculer les tensions efficaces aux bornes de R_1 , L et C'_0 .

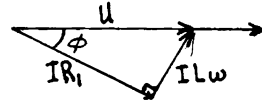
Justifiez vos réponses à partir de la construction de Fresnel.

SOLUTION :

I – a) D'après le diagramme de Fresnel on a :

$$\operatorname{tg} \phi = L\omega/R_1$$

$\phi = -\pi/4$ (courant en retard sur la tension)



b) Le courant a pour expression en fonction du temps :

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$\text{avec } I_m = U_m/Z_1$$

$$\text{où } Z_1^2 = R_1^2 + L^2 \omega^2 = 2 \cdot 10^4$$

$$Z_1 = \sqrt{2} \cdot 10^2 \Omega$$

$$U_m = \sqrt{2} \cdot U = \sqrt{2} \cdot 120 \text{ V}$$

$$\text{Ainsi on a : } I_m = 1,2 \text{ A}$$

L'expression de i sera donc :

$$i(t) = 1,2 \sin(100\pi t - \pi/4)$$

II – a) $\operatorname{Tg} \phi_2 = 1/R_2 \cdot C \cdot \omega =$

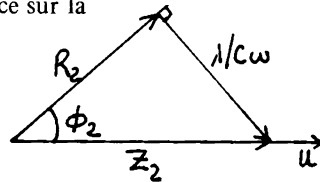
$$= 1/3000(1/3\pi) \cdot 10^{-5} \cdot 10^2 \pi = 1$$

$\phi_2 = +\pi/4$ (courant en avance sur la tension)

b) L'expression du courant sera :

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$I_m = U_m/Z_2$$



$$\text{où } Z_2^2 = R_2^2 + 1/C^2 \cdot \omega^2$$

$$\text{avec } R_2 = 3 \cdot 10^3 ; C = 10^{-5}/3\pi ; \omega = 2 \cdot \pi \cdot 50$$

$$Z_2 = 3 \sqrt{2} \cdot 10^3$$

$$I_m = 120 \sqrt{2}/3 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^3$$

$$I_m = 40 \text{ mA. Ainsi on pourra écrire :}$$

$$i(t) = 40 \cdot 10^{-3} \sin(100\pi t + \pi/4)$$

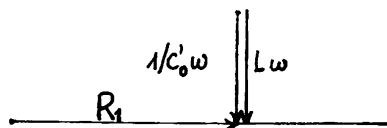
III – a) La valeur maximale de l'intensité correspond au cas où le circuit est en résonance. Dans ce cas, la tension efficace aux bornes du circuit est égale à celle aux bornes de la résistance R_1 , d'où :

$$I_0 = U/R_1 = 1,2 \text{ A}$$

On a aussi : $L.C'_0 . \omega^2 = 1$

d'où : $C'_0 = 1/L . \omega^2$

$$C'_0 = 31,8 \mu F$$



b) La tension efficace aux bornes de R_1 est égale à 120 V, les tensions efficaces aux bornes de L et C'_0 sont égales à :

$$I_0 . L\omega = I_0 / C'_0 . \omega = 120 \text{ V}$$

—oOo—

Ex. - 13* :

(Ce problème est la partie III du problème n°. 10 du chapitre X).

Le moteur qui entraîne le câble est alimenté par un courant alternatif de tension efficace $U=380 \text{ V}$ et de fréquence 50 Hz .

- 1) Donner l'expression de la différence de potentiel instantanée.
- 2) Ce moteur développe une puissance mécanique de 8 chevaux ; son rendement est 0,9. Calculer la puissance électrique consommée.
- 3) L'intensité qui traverse ce moteur en régime normal est 21 A. Calculer le facteur de puissance $\cos \phi$.
- 4) Calculer l'impédance d'une self de coefficient d'auto-induction $L=1,2 \text{ H}$ qui, traversée par un courant de même fréquence que le précédent, introduirait entre l'intensité et la différence de potentiel, le déphasage ϕ de la question précédente.

SOLUTION :

1) L'expression de la d.d.p instantanée est :

$$u(t) = 380 . \sqrt{2} \sin (100 \pi t)$$

2) La puissance électrique consommée est égale à :

$$\begin{aligned} 8/0,9 &= 8,88 \text{ chevaux} \\ &= 6542,22 \text{ W} \end{aligned}$$

3) $P = UI \cos \phi$

$$\text{d'où, } \cos \phi = 6542,2/380.21 = 0,82$$

$$\phi = 35^\circ = 0,6 \text{ rad}$$

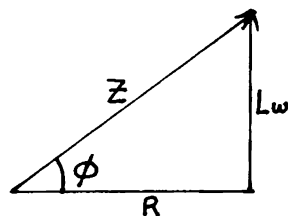
4) On a d'après le diagramme de Fresnel :

$$\sin \phi = L\omega/Z$$

donc l'impédance Z de la self sera :

$$Z = L\omega/\sin \phi = 1,2.100\pi/\sin 35^\circ$$

$$Z = 657,2 \text{ ohms}$$



Ex. - 14 - :

Dans deux branches en parallèle d'un circuit, passent deux courants alternatifs de même fréquence que le courant du circuit principal. L'intensité efficace du courant dans chacune des branches est 7 A et 9 A avec un déphasage de $\pi/2$ entre les deux courants :

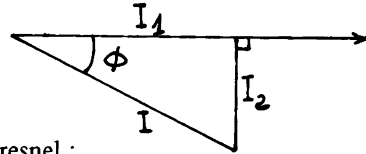
- 1) Calculer l'intensité efficace du courant dans le circuit principal.
- 2) Quels sont les déphasages entre ce courant et ceux des dérivation ?

SOLUTION :

1) Le courant dans un circuit principal est la superposition des deux courants des dérivation :

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 = 49 + 81$$

$$I = 11,4 \text{ A}$$



2) On a d'après le diagramme de Fresnel :

$$\cos \phi = 7/11,4 = 0,61$$

$$\phi = 52^\circ$$

I est en retard sur I_1 de 52° , et en avance sur I_2 de 38° ; ($90-52$).

**Ex. - 15 - :**

En parallèle, on branche une self pure d'inductance L et une capacité $C=1\mu\text{F}$. On alimente cette dérivation ainsi formée par une tension sinusoïdale ($N=50 \text{ Hz}$).

- 1) Donner les expressions des intensités instantanées dans L et C.
- 2) Construire le diagramme de Fresnel pour ces intensités en déduire le déphasage entre le courant dans le circuit principal et la tension.
- 3) Calculer l'inductance L pour que le courant principal devienne nul.

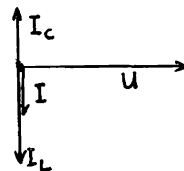
SOLUTION :

1) Les courants dans L et C sont respectivement en retard et en avance, sur la tension commune aux deux dérivation, de $\pi/2$. On aura donc :

$$i_L = I_m \sin(\omega t - \pi/2)$$

$$i_C = I'_m \sin(\omega t + \pi/2)$$

2) Le courant du circuit principal est égal à la superposition des deux courants i_C et i_L .



Son intensité efficace est telle que :

$$I = I_C - I_L$$

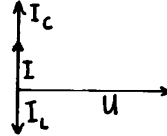
Deux cas peuvent se présenter :

a) L'impédance de la self est plus petite que celle de la capacité :

$$L\omega < 1/C\omega$$

$$I_L > I_C$$

Le courant I est en retard sur U de $\pi/2$.

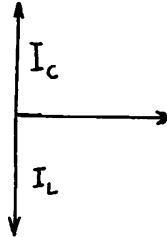


b) L'impédance de la self est plus grande que celle de la capacité :

$$L\omega > 1/C\omega$$

$$I_C > I_L$$

Le courant I est en avance sur U de $\pi/2$.



3) Le troisième cas sera quand :

$$1/C\omega = L\omega$$

c'est-à-dire $CL\omega^2 = 1$ (Circuit bouchon)

Le courant principal est nul, et l'on a :

$$\begin{aligned} L_0 &= 1/C\omega^2 \\ L_0 &= 1/10^{-6} \cdot 10^4 \cdot \pi^2 & (\pi^2 = 10) \\ L_0 &= 10 \text{ Henry} \end{aligned}$$



TABLE des MATIERES

	Pages
Chapitre I : Cinématique du mouvement rectiligne uniforme	7
Chapitre II : Cinématique du mouvement uniformément varié	15
Chapitre III : Chute libre	29
Chapitre IV : Application de la relation fondamentale de la dynamique au mouvement rectiligne	43
Chapitre V : Le mouvement circulaire uniforme	83
Chapitre VI : Le mouvement rectiligne sinusoïdal	99
Chapitre VII : Rotation d'un solide autour d'un axe fixe	<u>113</u>
Chapitre VIII : Théorème de l'énergie cinétique	<u>133</u>
Chapitre IX : Le pendule pesant	<u>143</u>
Chapitre X : Energie mécanique	<u>153</u>
Chapitre XI : Phénomènes vibratoires	167
Chapitre XII : Interférences lumineuses	187
Chapitre XIII : Courant alternatif	197



Achevé d'imprimer sur les presses
de l'entreprise nationale des arts graphiques
Unité de Réghaïa
1984